

# **Systematische lineare Analysen der Einflüsse unterschiedlicher Verstimmungseffekte auf die Dynamik der Polykristallin-Schaufeln**

## **Systematic Linear Analyses Regarding the Influence of Different Mistuning Effects on Dynamics of Polycrystalline Blades**

**Bachelorarbeit**

an der

Fakultät Maschinenbau, Elektro- und Energiesysteme  
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg  
am Fachgebiet Strukturmechanik und Fahrzeugschwingungen

vorgelegt von

Dennis Berninger

Abgabedatum: 15.09.2017

Professor: Prof. Dr.-Ing. Arnold Kühhorn  
Betreuer: Dr. Andreas Hartung (MTU Aero Engines AG)  
Dr.-Ing. habil. Bernd Beirow  
M. Sc. Robby Weber



## Bachelorarbeit

### „Systematische lineare Analysen der Einflüsse unterschiedlicher Verstimmungseffekte auf die Dynamik der Polykristallin-Schaufeln“

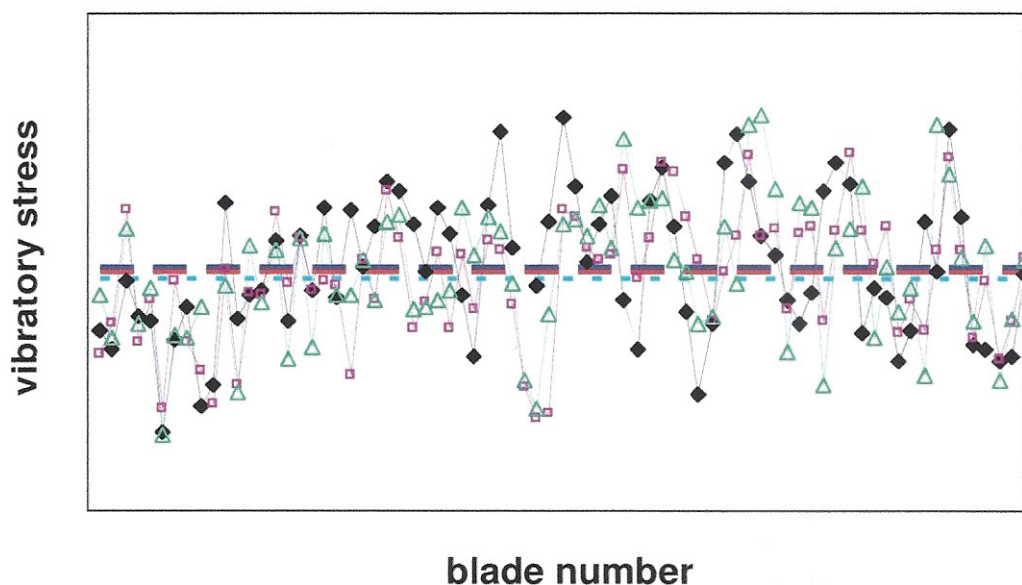
(Systematic Linear Analyses Regarding the Influence of Different Mistuning Effects on Dynamics of Polycrystalline Blades)

Bearbeiter: Herr Dennis Berninger

Matrikelnummer: 3344220

#### **Hintergrund:**

Die Schaufeln von Turbinenlaufstufen und -leitstufen sind hohen thermo-mechanischen Belastungen ausgesetzt. Dazu gehört unter anderem die hieraus resultierende dynamische Spannung beim Durchfahren der Resonanzen im Betrieb. Höhe und Akkumulation der Schwingungsbeanspruchung sind wesentliche Einflussfaktoren auf die Lebensdauer dieser Bauteile. Überhöhte Spannungen für die festgelegte Lebensdauer (Akkumulation der Schwingungszyklen) führen auf Grund von *High Cycle Fatigue* zum Versagen der Schaufel. Die Lebensdauervorhersage wird jedoch dadurch erschwert, dass die Schaufeln einer Stufe auf unterschiedliche Weise verstimmt sind. Dazu gehören die geometrische Verstimmung infolge von Fertigungstoleranzen, Kontaktverstimmung auf Grund unterschiedlicher Kontaktschließung, sowie Verstimmung infolge unterschiedlicher Kristallorientierungen bei den Einkristall-Schaufeln. Dies führt zu deutlich unterschiedlichen Schwingungsspannungsverteilungen sogar bei gleichen, aufeinanderfolgenden Resonanzdurchfahrten [1].



**Abb. 1:** Drei Messungen einer Turbinenstufe unter identischen Bedingungen [1]

**Ziel:**

Ziel dieser Bachelorarbeit ist die systematische Analyse von zwei maßgeblichen Einflussgrößen auf die Verteilungen der Schwingungsspannungen, welche durch die Maximalverschiebungen der Schaufeln beschreibbar sind. Zum Einen handelt es sich um die geometrische Verstimmung, modelliert durch die probabilistische Modellierung der Elastizitätsmodule, zum Anderen Kontaktverstimmung, modelliert durch die probabilistische Modellierung der modalen Dämpfungen. Untersucht werden müssen stationäre, fremderregte Schaufelschwingungen mittels des Tools ROCMAN sowie stationäre und transiente, fremderregte Schaufelschwingungen mittels des Finite Elemente Tools CalculiX. Ein Vergleich unterschiedlicher probabilistischer Verteilungen für beide Verstimmungsarten ist an zwei Dummy-Schaufelkränzen mit unterschiedlichen Randbedingungen durchzuführen.

**Teilschritte:**

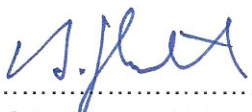
1. Erstellung einer Gliederung des Vorgehens und eines Zeitplans zur Durchführung der Bachelorarbeit
2. Einarbeitung in die Thematik von Schaufelschwingungen, insbesondere Charakteristika [2] und Modellierung von geometrischer Verstimmung und Dämpfung [3], in die Durchführung stationärer und transienter [4] dynamischer Analysen bei Fremderregung, sowie in die Probabilistik und Monte-Carlo Simulationsvorgehensweise
3. Einarbeitung in die dynamischen Analysen mit CalculiX und ROCMAN
4. Auswahl der probabilistischen Verteilungen und Modellierung verstimmter Schaufelkränze mit CalculiX und ROCMAN.
5. Durchführung numerischer Analysen
6. Auswertung der Ergebnisse
7. Dokumentation

**Literatur:**

- [1] Hartung, A., Hackenberg, H.-P.: A practical approach for evaluation of equivalent linear damping from measurements of mistuned and/or non-linear stages and forced response validation, Proceedings of ASME Turbo Expo 2016, GT2016-56435, Seoul.
- [2] Beirow, B.: Grundlegende Untersuchungen zum Schwingungsverhalten von Verdichterslaufrädern in Integralbauweise, Habilitationsschrift, BTU Cottbus, 2009.
- [3] Hohl, A.: Systematische Verstimmung und mehrfach gekoppelte Schaufelkränze von Turbomaschinen, Abschlussbericht über das Vorhaben Nr. 898, Frankfurt am Main, Heft R550 -2010.
- [4] Hartung, A.: A Numerical Approach for the Resonance Passage Computation, Proceedings of ASME Turbo Expo 2010, GT2010-22051, Glasgow.

Bearbeitungszeitraum: SoSe 2017

Betreuer: B. Beirow und R. Weber (BTU) sowie A. Hartung (MTU)



Prof. Dr.-Ing. A. Kühhorn



Dr. Andreas Hartung





# Inhaltsverzeichnis

<b>Erklärung</b>	<b>IV</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>V</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>VIII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Zielsetzung . . . . .	2
<b>2 Grundlagen des Schwingungsverhaltens von Turbinenlaufstufen</b>	<b>3</b>
2.1 Grundlegende Schwingungssysteme . . . . .	3
2.1.1 Lineare ungedämpfte Schwingung . . . . .	3
2.1.2 Lineare gedämpfte Schwingung . . . . .	4
2.1.3 Dynamik von Turbinenlaufstufen . . . . .	6
2.2 Schwingungsverhalten unverstimmter Turbinenlaufstufen . . . . .	7
2.2.1 Knotendurchmesserlinien . . . . .	7
2.2.2 Schaufelschwingungen . . . . .	8
2.2.3 Schwingungsverhalten von Turbinenlaufstufen . . . . .	9
2.2.4 Knotendurchmesserdiagramm . . . . .	11
2.3 Fremderregte Schwingungen unverstimmter Turbinenlaufstufen . . . . .	12
2.3.1 Anregungsmechanismen von Turbinenlaufstufen . . . . .	12
2.3.2 Fremderregung . . . . .	13
2.3.3 Aliasing . . . . .	15
2.3.4 Analyse fremderregter Schwingungen . . . . .	16
2.4 Fremderregte Schwingungen verstimmtter Turbinenlaufstufen . . . . .	18
2.4.1 Schwingungsverhalten verstimmtter Turbinenlaufstufen . . . . .	18
2.4.2 Analyse fremderregter Schwingungen . . . . .	20
2.4.3 Amplitudenüberhöhung . . . . .	20
2.5 Charakteristische Eigenschaften transienter Schwingungen . . . . .	21

---

<b>3</b>	<b>Probabilistische Grundlagen</b>	<b>23</b>
3.1	Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	23
3.1.1	Normalverteilung . . . . .	24
3.1.2	Weibullverteilung . . . . .	24
3.1.3	Gleichverteilung . . . . .	26
3.1.4	Dreiecksverteilung . . . . .	26
3.1.5	Künstliche Verteilung . . . . .	27
3.2	Sampling Methoden . . . . .	28
3.2.1	Simple Random Sampling . . . . .	28
3.2.2	Latin Hypercube Sampling . . . . .	29
3.3	Box-Plot . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Analysierte Modelle und verwendete Tools</b>	<b>31</b>
4.1	Analysierte Modelle . . . . .	31
4.2	Analyse verstimmter Systeme mittels CALCULIX . . . . .	33
4.2.1	Lineare dynamische Berechnungen . . . . .	33
4.2.2	Erzeugen des Vollmodells . . . . .	34
4.2.3	Verstimmungsmodellierung . . . . .	35
4.3	Analyse verstimmter Systeme mittels ROCMAN . . . . .	36
4.3.1	Modellreduktion in ROCMAN . . . . .	36
4.3.2	Schaufelreduktion . . . . .	37
4.3.3	Scheibenreduktion . . . . .	39
4.3.4	Zusammensetzen des Vollmodells . . . . .	40
4.3.5	Reduktion der Kopplungsfreiheitsgrade . . . . .	42
4.3.6	Verstimmungssapplikation . . . . .	42
4.3.7	Kopplung der Deckbandfreiheitsgrade . . . . .	43
4.4	Vergleich zwischen CALCULIX und ROCMAN . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Stationäre Analysen verstimmter Turbinenlaufstufen</b>	<b>48</b>
5.1	Vorgehensweise . . . . .	48
5.2	Stark vereinfachtes Modell . . . . .	49
5.2.1	Bewertung des Stichprobenumfangs . . . . .	49
5.2.2	Probabilistischer Vergleich der Sampling Methoden . . . . .	50
5.2.3	Frequenzanalyse . . . . .	52
5.2.4	Amplitudenanalyse . . . . .	58
5.3	Realitätsnahes Modell . . . . .	65
5.3.1	Frequenzanalyse . . . . .	65
5.3.2	Amplitudenanalyse . . . . .	69

---

<b>6</b>	<b>Transiente Analysen verstimmter Turbinenlaufstufen</b>	<b>74</b>
6.1	Transiente Schwingungsantwort verstimmter Turbinenlaufstufen . . . . .	74
6.2	Bestimmung der linearen Dämpfung aus der mittleren Amplitude . . . . .	75
6.2.1	Erläuterung der Methode zur Dämpfungsbestimmung . . . . .	76
6.2.2	Verifikation der Methode an dem realitätsnahen Modell . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>83</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>85</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>86</b>

# Erklärung

Der Verfasser erklärt, dass er die vorliegende Arbeit selbständig, ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt hat. Die aus fremden Quellen (einschließlich elektronischer Quellen) direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind ausnahmslos als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt worden.

München, den 15.09.2017

Dennis Berninger



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Drei BSSM-T Messungen einer realen Turbinenlaufstufe unter identischen Bedingungen bei der MTU Aero Engines AG [12] . . . . .	1
2.1	Linear gedämpfte Schwingung . . . . .	5
2.2	Finite Elemente Darstellung einer stark vereinfachten Turbinenlaufstufe . .	6
2.3	Schematische Darstellung von Knotendurchmesserlinien . . . . .	8
2.4	Knotendurchmesserlinien an einem realitätsnahen Modell . . . . .	8
2.5	Schaufelschwingungen einer stark vereinfachten Turbinenlaufstufe . . . . .	9
2.6	Schaufelschwingungen einer realitätsnahen Turbinenlaufstufe . . . . .	9
2.7	Grundtypen der Schwingungsformen . . . . .	10
2.8	Knotendurchmesserdiagramm einer realitätsnahen Turbinenlaufstufe . . . .	11
2.9	Reales CAMPBELL-Diagramm aus einer Messung einer Turbinenlaufstufe bei der MTU Aero Engines AG [13] . . . . .	13
2.10	Schematische Darstellung von Nachlaufdüellen [23] . . . . .	14
2.11	Schematisches CAMPBELL-Diagramm einer unverstimmten Turbinenlaufstufe	15
2.12	Periodische Anregungsverläufe ausgewählter Erregerordnungen . . . . .	15
2.13	Auslenkung der Eigenschwingung in Strömungsrichtung mit Darstellung der Anregungsmodellierung . . . . .	17
2.14	Fremderregte Schwingungsantwort aller Schaufeln einer unverstimmten Turbinenlaufstufe . . . . .	18
2.15	Schematisches CAMPBELL-Diagramm einer verstimten Turbinenlaufstufe	19
2.16	Exemplarische fremderregte Schwingungsantwort aller Schaufeln einer verstimten Turbinenlaufstufe . . . . .	20
2.17	Resonanzdurchfahrt einer unverstimmten Turbinenlaufstufe bei verschiedenen Beschleunigungsraten . . . . .	21
3.1	Dichtefunktionen der verwendeten Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	23
3.2	Normalverteilung . . . . .	24
3.3	Weibullverteilung . . . . .	25
3.4	modifizierte Weibullverteilung . . . . .	25
3.5	Gleichverteilung . . . . .	26

3.6	Dreiecksverteilung . . . . .	27
3.7	künstliche Verteilung . . . . .	27
3.8	Schematische Darstellung des Simple Random Samplings . . . . .	28
3.9	Schematische Darstellung des Latin Hypercube Samplings . . . . .	29
3.10	Schematische Darstellung des Box-Plots mit Bezeichnung der Parameter .	30
4.1	Analysierte Modelle mit Randbedingungen . . . . .	31
4.2	Schematische Darstellung von Kontaktstellen der Deckbandkopplung . . .	32
4.3	Vergleich der fremderregten Schwingungsantwort des Sektormodells mit zyklisch symmetrischen Randbedingungen und des Vollmodells . . . . .	34
4.4	Darstellung der Schaufel mit äußeren Freiheitsgraden . . . . .	37
4.5	Darstellung der Scheibe mit äußeren Freiheitsgraden . . . . .	39
4.6	Zusammensetzen der Untersysteme . . . . .	41
4.7	Schematische Darstellung der ersten Biegeschwingung eines Balkens bei verschiedenen Einspannungen . . . . .	43
4.8	Exemplarische fremderregte Schwingungsantwort einer strukturverstimnten Turbinenlaufstufe mit dem Tool CALCULIX und dem Tool ROCMAN . . .	45
4.9	Probabilistischer Vergleich zwischen CALCULIX und ROCMAN . . . . .	46
5.1	Schematische Darstellung der Monte Carlo Vorgehensweise . . . . .	48
5.2	Ausgewählte Quantile der maximalen Amplitude und Resonanzfrequenz für normalverteilte Strukturverstimmung und verschiedene Dämpfungsverstim- mungen in Abhängigkeit der Simulationszahl . . . . .	49
5.3	Box-Plots der maximalen Amplitude pro Schaufel . . . . .	51
5.4	Verlauf des 97,5%-Quantils der maximalen Amplitude in Abhängigkeit der Simulationszahl . . . . .	52
5.5	Exemplarische Darstellung der ausgewerteten Frequenzen . . . . .	52
5.6	Dichtefunktionen der Resonanzfrequenzen für unterschiedliche Strukturver- stimmung . . . . .	53
5.7	Dichtefunktion der Resonanzfrequenzen für unterschiedliche Dämpfungs- verstimmung . . . . .	55
5.8	Box-Plots der Resonanzfrequenzen für unterschiedliche Strukturverstimmung	56
5.9	Probabilistischer Vergleich der Elastizitätsmodule und Resonanzfrequenzen	57
5.10	Exemplarische Darstellung der ausgewerteten Amplituden . . . . .	58
5.11	Dichtefunktionen der maximalen Amplitude pro Schaufel für verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	59
5.12	Box-Plots der maximalen Amplitude pro Schaufel für verschiedene Wahr- scheinlichkeitsverteilungen . . . . .	61

---

5.13	Exemplarische Darstellung der ausgewerteten maximalen Amplitude . . . .	62
5.14	Box-Plots der maximalen Amplitude pro Turbinenlaufstufe für verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	63
5.15	Exemplarische Darstellung der ausgewerteten Frequenzen . . . . .	66
5.16	Box-Plots der Resonanzfrequenzen für unterschiedliche Strukturverstimmung	67
5.17	Probabilistischer Vergleich der Elastizitätsmodule und Resonanzfrequenzen	68
5.18	Exemplarische Darstellung der ausgewerteten Amplituden . . . . .	69
5.19	Box-Plots der maximalen Amplitude pro Schaufel für verschiedene Wahr- scheinlichkeitsverteilungen . . . . .	70
5.20	Exemplarische Darstellung der ausgewerteten maximalen Amplitude . . . .	71
5.21	Box-Plots der maximalen Amplitude pro Turbinenlaufstufe für verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	72
6.1	Transiente Schwingungsantwort exemplarischer Turbinenlaufstufen mit nor- malverteilter Strukturverstimmung und konstanter Dämpfung bei unter- schiedlichen Beschleunigungsraten . . . . .	74
6.2	Transiente Schwingungsantwort einer realer Turbinenlaufstufe aus einer Messung bei der MTU Aero Engines AG [11] . . . . .	75
6.3	Kennlinie zur Bestimmung der linearen Dämpfung . . . . .	76
6.4	Schematische Darstellung der Vorgehensweise . . . . .	77
6.5	Verhältnis der mittleren Amplituden für die erste Biegung . . . . .	79
6.6	Verhältnis der mittleren Amplituden für die erste Edgewise Biegung . . . .	80
6.7	Ermittlung der Dämpfung aus dem Verhältnis der Beschleunigungsraten . .	80
6.8	Verhältnis der Beschleunigungsraten ohne Ausreißer . . . . .	81
6.9	Ermittlung der Dämpfung aus dem Verhältnis der Beschleunigungsraten ohne Ausreißer . . . . .	82
A.1	Exemplarischer Vergleich des Medians und des Mittelwerts . . . . .	85

# Nomenklatur

## Symbolverzeichnis

### Lateinische Buchstaben

Symbol	Einheit	Bezeichnung
$d$	$[kg/s]$	Dämpfungskonstante
$E$	$[N/mm^2]$	Elastizitätsmodul
$f$	$[Hz]$	Frequenz
$f(x)$	$[-]$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
$F$	$[N]$	Anregungskraft
$F(x)$	$[-]$	Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion
$H$	$[-]$	Häufigkeit
$j$	$[-]$	imaginäre Einheit $j = \sqrt{-1}$
$m$	$[kg]$	Masse
$N$	$[-]$	Anzahl der Schaufeln
$N_m$	$[-]$	Anzahl der Moden
$t$	$[s]$	Zeit
$u$	$[mm]$	Verschiebung
$W$	$[Nm]$	Verzerrungsenergie

## Griechische Buchstaben

Symbol	Einheit	Bezeichnung
$\alpha$	[—]	Amplitudenüberhöhungsfaktor
$\alpha_{max}$	[—]	Whitehead-Limit
$\beta$	[rad]	Phasenwinkel
$\gamma$	[—]	Lageparameter der Weibullverteilung
$\delta$	[—]	Verstimmungsparameter
$\kappa$	[—]	Formparameter der Weibullverteilung
$\zeta$	[—]	Lehr'sches Dämpfungsmaß
$\eta$	[—]	Skalenparameter der Weibullverteilung
$\lambda$	[1/s]	Eigenwert
$\mu$	[—]	Mittelwert der Wahrscheinlichkeitsverteilung
$\sigma$	[—]	Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung
$\tau$	[s]	Periodendauer
$\varphi$	[—]	Eigenmode
$\omega$	[rad/s]	Eigenkreisfrequenz
$\Delta$	[—]	Abweichung
$\Lambda$	[—]	logarithmisches Dekrement
$\Omega$	[rad/s]	Erregerkreisfrequenz

## Vektoren, Matrizen und Tensoren

Symbol	Einheit	Bezeichnung
<b>B</b>	[—]	Boole'sche Zuordnungsmatrix
<b>D</b>	[kg/s]	Dämpfungsmatrix
<b>f</b>	[N]	Vektor der externen Kräfte
<b><math>\mathcal{F}</math></b>	[—]	Fouriermatrix
<b>g</b>	[N]	Vektor der Kontaktkräfte
<b>K</b>	[N/mm]	Steifigkeitsmatrix
<b>L</b>	[—]	Nullraum der Zuordnungsmatrix
<b>M</b>	[kg]	Massenmatrix
<b>T</b>	[—]	Rotationsmatrix
<b>u</b>	[mm]	Verschiebungsvektor
$\phi$	[—]	Eigenvektor
<b><math>\Theta</math></b>	[—]	CRAIG-BAMPTON Basis
<b><math>\Phi</math></b>	[—]	Modalmatrix



## Indizes und sonstige Symbole

Symbol	Bedeutung
$b$	Schaufel
$d$	Scheibe
$cnt$	freies Deckband
$cpl$	Koppelfreiheitsgrade
$H$	hermitesch
$f$	innere Freiheitsgrade
$h$	Harmonische
$i$	äußere Freiheitsgrade
$m$	Mode
$mis$	verstimmt
$nom$	nominal
$T$	transponiert
$red$	reduziert
$shr$	Deckbandfreiheitsgrade
$zyk$	zyklisch symmetrische Freiheitsgrade
$*$	konjugiert komplex
$\sim$	zyklische Koordinaten
$-$	physikalische Koordinaten
$\wedge$	Mittelwert

## Abkürzungsverzeichnis

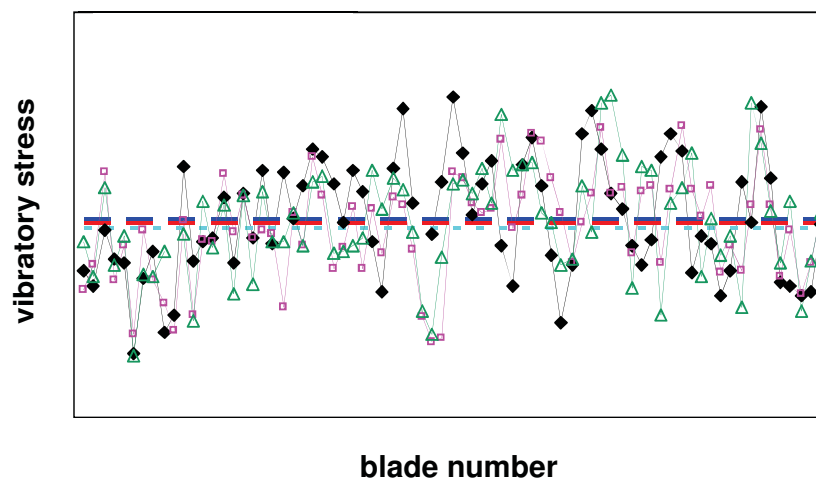
Symbol	Bedeutung
1F	Erster Biegemode
2F	Zweiter Biegemode
1E	Erster Edgewise Biegemode
1T	Erster Torsionsmode
CMS	Component Mode Synthesis
EO	Erregerordnung
FE	Finite Elemente
IBPA	Schaufelphasenwinkel
LHS	Latin Hypercube Sampling
MPC	Multiple Point Constraint
ND	Knotendurchmesser
SPC	Single Point Constraint
SRS	Simple Random Sampling

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Zur Berechnung der Dynamik von Turbinenlaufstufen wird häufig die Annahme getroffen, dass die Schaufeln in ihren mechanischen Eigenschaften identisch sind. Somit ist es möglich die Turbinenlaufstufe in identische Sektoren zu unterteilen. Die Berechnung der Dynamik kann dann für das Sektormodell mit zyklisch symmetrischen Randbedingungen durchgeführt werden, wodurch sich eine deutliche Reduktion der Freiheitsgrade im Vergleich zum Vollmodell ergibt.

Allerdings treten in der Realität stets Abweichungen unter den einzelnen Schaufelsegmenten auf. Das Auftreten dieser Abweichungen wird als Verstimmung (engl. Mistuning) bezeichnet. Dabei kann zwischen drei Arten der Verstimmung unterschieden werden. Geometrische Verstimmung beschreibt den Fall, bei dem Geometrie und Material der Sektoren unterschiedlich sind. Dies kann durch Fertigungstoleranzen, Materialinhomogenitäten sowie Verschleiß bedingt sein. Des Weiteren tritt Kontaktverstimmung infolge unterschiedlicher Kontaktschließungen am Schaufelfuß sowie Deckband auf. Außerdem kommt es bei Einkristall-Schaufeln zu Verstimmung aufgrund unterschiedlicher Kristallorientierungen.



**Abbildung 1.1:** Drei BSSM-T Messungen einer realen Turbinenlaufstufe unter identischen Bedingungen bei der MTU Aero Engines AG [12]

Der Einfluss der Verstimmung lässt sich anhand dreier Messungen einer realen Turbinenlaufstufe bei der MTU Aero Engines AG zeigen [12]. Die Messungen werden unter identischen Bedingungen mittels BSSM-T<sup>1</sup> durchgeführt. **Abbildung 1.1** zeigt die Spannung der Schaufeln für drei Resonanzdurchfahrten. Bei Betrachtung einer Resonanzdurchfahrt ergeben sich von Schaufel zu Schaufel deutlich unterschiedliche Spannungen. Dies lässt sich auf den kombinierten Einfluss der drei Verstimmungsarten zurückführen. Darüber hinaus werden für die drei Resonanzdurchfahrten bei identischen Bedingungen unterschiedliche Werte gemessen, was hauptsächlich durch die unterschiedlichen Kontaktschließungen bedingt ist.

## 1.2 Zielsetzung

Ziel dieser Bachelorarbeit ist die systematische Analyse der Einflüsse zweier Verstimmungseffekte auf das lineare Schwingungsverhalten von Turbinenlaufstufen. Zum einen wird der Einfluss der geometrischen Verstimmung anhand der probabilistischen Modellierung der Elastizitätsmodule pro Schaufel analysiert. Dies wird im weiteren Verlauf als Strukturverstimmung bezeichnet. Zum anderen wird der Einfluss einer linearen Approximation der Kontaktverstimmung analysiert. Dazu wird die modale Dämpfung pro Mode probabilistisch modelliert. Mit der Angabe der modalen Dämpfung wird die Strukturdämpfung, Reibungsdämpfung und aerodynamische Dämpfung kombiniert abgebildet. Die einzelnen Anteile der Dämpfung werden dabei nicht explizit berechnet. Dies wird im weiteren Verlauf als Dämpfungsverstimmung bezeichnet.

Für die linearen Analysen werden sowohl stationäre fremderregte Simulationen durchgeführt als auch transiente fremderregte Simulationen. Die Analysen werden mittels des Finite Elemente Tools CALCULIX für das Vollmodell realisiert. Zur probabilistischen Modellierung kommen fünf verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen zum Einsatz. Darunter sind die konventionellen Verteilungen Normalverteilung, Gleichverteilung sowie eine modifizierte Form der Weibullverteilung. Des Weiteren wird die Dreiecksverteilung analysiert und eine künstliche Verteilung eingeführt. Für die stationären fremderregten Analysen werden Monte Carlo Simulationen durchgeführt und die Resonanzfrequenz und Amplitude probabilistisch ausgewertet. Ziel der transienten fremderregten Analysen ist die numerische Verifikation einer Methode zur Bestimmung der linearen Dämpfung anhand transientser Monte Carlo Simulationen [12].

---

<sup>1</sup>Berührungslose Schaufelschwingungsmessung - Turbinenlaufstufen mit Deckband

## 2 Grundlagen des Schwingungsverhaltens von Turbinenlaufstufen

Turbinenlaufstufen weisen eine Vielzahl unterschiedlicher Eigenschwingungsformen auf, welche durch verschiedene Mechanismen zu Schwingungen angeregt werden können. Zu Beginn des Kapitels werden die Eigenschwingungen von Turbinenlaufstufen ausgehend von dem linearen dynamischen Verhalten grundlegender Schwingungssysteme beschrieben. Anschließend werden die wichtigsten Anregungsmechanismen im realen Triebwerk aufgezeigt. Von diesen wird sich auf die Fremderregung konzentriert. Dabei wird auf Grundlage des unverstimmten Systems die fremderregte Schwingungsantwort erläutert, bevor abschließend die Besonderheiten des verstimmten Systems betrachtet werden.

### 2.1 Grundlegende Schwingungssysteme

#### 2.1.1 Lineare ungedämpfte Schwingung

Zur einführenden Beschreibung wird ein allgemeines Schwingungssystem mit  $n$  Freiheitsgraden angenommen. Die freie ungedämpfte Bewegungsgleichung lautet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

Hierbei entspricht  $\mathbf{M}$  der Massenmatrix,  $\mathbf{K}$  der Steifigkeitsmatrix und  $\mathbf{u}$  dem Vektor der momentanen Auslenkung.

Zur Lösung wird für  $\mathbf{u}$  ein zeitabhängiger, periodischer Verlauf angenommen und der Ansatz  $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi}e^{\lambda t}$  in die Bewegungsgleichung (2.1) eingesetzt. Es ergibt sich die Formulierung des Eigenwertproblems zu

$$(\lambda^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\boldsymbol{\phi}e^{\lambda t} = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Mit der Annahme nichttrivialer Lösungen  $\boldsymbol{\phi} \neq \mathbf{0}$  folgen daraus die  $2n$  komplexen Eigenwerte

$$\lambda_k = \pm j\omega_{0,k} \quad \text{für } k = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$



Hierbei entspricht  $\omega_{0,k}$  der ungedämpften Eigenkreisfrequenz. Durch Einsetzen von  $\lambda_k$  kann Gleichung (2.2) zu

$$(-\omega_{0,k}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\phi}_k e^{\lambda_k t} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

umgeschrieben werden. Hieraus lassen sich die Eigenmoden  $\boldsymbol{\phi}_k$  bestimmen. Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Linearkombination der Eigenmoden zu

$$\mathbf{u}(t) = \sum_k^n \boldsymbol{\phi}_k e^{\lambda_k t} + \boldsymbol{\phi}_k^* e^{\lambda_k^* t}. \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Lineare gedämpfte Schwingung

Durch Dämpfung wird der Schwingung Energie entzogen. Dadurch klingen Schwingungen ab bzw. es stellt sich ein Gleichgewicht zwischen Energiezufuhr und -abfuhr bei fremderregten Schwingungen ein. Ohne Dämpfung treten im Resonanzfall dementsprechend unendlich hohe Amplituden auf.

#### Lehr'sches Dämpfungsmaß

Betrachtet man die lineare Bewegungsgleichung eines Ein-Massen-Schwingers

$$m\ddot{u} + d\dot{u} + ku = 0 \quad (2.6)$$

ist das Lehr'sche Dämpfungsmaß  $\zeta$  definiert als

$$\zeta = \frac{d}{2m\omega_0}. \quad (2.7)$$

Hierbei entspricht  $d$  der Dämpfungskonstante,  $m$  der Masse und  $\omega_0$  der ungedämpften Eigenkreisfrequenz. Unter Annahme  $\zeta \leq 1$  lautet eine Lösung der Bewegungsgleichung (2.6)

$$u(t) = U_0 e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_D t + \beta). \quad (2.8)$$

Hierbei entspricht  $\omega_D$  der gedämpften Eigenkreisfrequenz.

#### Logarithmisches Dekrement

Das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  bildet ein Maß für die Abnahme zweier aufeinanderfolgender Amplitudenmaxima. Es ist als natürlicher Logarithmus des Verhältnis dieser Maxima definiert

$$\Lambda = \ln \frac{u_1}{u_2}. \quad (2.9)$$

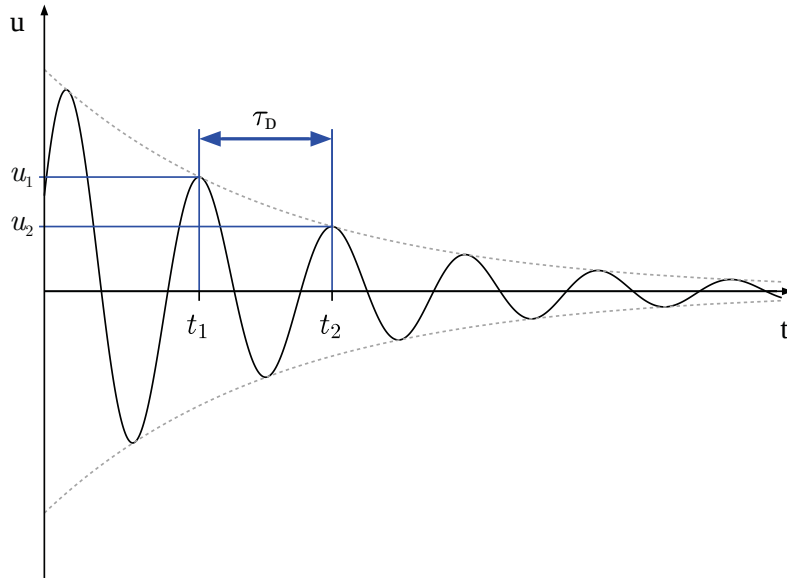


Abbildung 2.1: Linear gedämpfte Schwingung

Dabei steht es in direktem Zusammenhang mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß. Um diesen Zusammenhang herzuleiten, werden in **Abbildung 2.1** die Amplituden zum Zeitpunkt  $t_1$  und  $t_2$  betrachtet. Das Verhältnis der Amplituden lautet unter Verwendung von Gleichung (2.8)

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{U_0 e^{-\zeta \omega_0 t_1} \cos(\omega_D t_1 + \beta)}{U_0 e^{-\zeta \omega_0 t_2} \cos(\omega_D t_2 + \beta)}. \quad (2.10)$$

Die Zeitdauer  $t_2 - t_1$  beschreibt genau eine Periode  $\tau_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$ . Daraus lässt sich die Beziehung  $\cos(\omega_D t_2 + \beta) = \cos(2\pi + \omega_D t_1 + \beta) = \cos(\omega_D t_1 + \beta)$  ableiten. Dementsprechend vereinfacht sich Gleichung (2.10) zu

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{e^{-\zeta \omega_0 t_1}}{e^{-\zeta \omega_0 (t_1 + \tau_D)}} = e^{\zeta \omega_0 \tau_D}. \quad (2.11)$$

Eingesetzt in Gleichung (2.9) und unter Verwendung von  $\omega_D = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_0$  ergibt sich

$$\Lambda = \ln \frac{u_1}{u_2} = \zeta \omega_0 \tau_D = \zeta \omega_0 \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_0} = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.12)$$

bzw.

$$\zeta = \frac{\Lambda}{\sqrt{(2\pi)^2 + \Lambda^2}}. \quad (2.13)$$

## Gedämpftes Schwingungssystem

Die freie gedämpfte Bewegungsgleichung eines Systems lautet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

Hierbei entspricht  $\mathbf{M}$  der Massenmatrix,  $\mathbf{D}$  der Dämpfungsmatrix,  $\mathbf{K}$  der Steifigkeitsmatrix und  $\mathbf{u}$  dem Vektor der momentanen Auslenkung. Die Modellierung der Dämpfung erfolgt durch einen massen- und steifigkeitsproportionalen Ansatz.

Zur Lösung der Bewegungsgleichung wird das Eigenwertproblem des gedämpften Systems

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{K})\boldsymbol{\phi} e^{\lambda t} = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

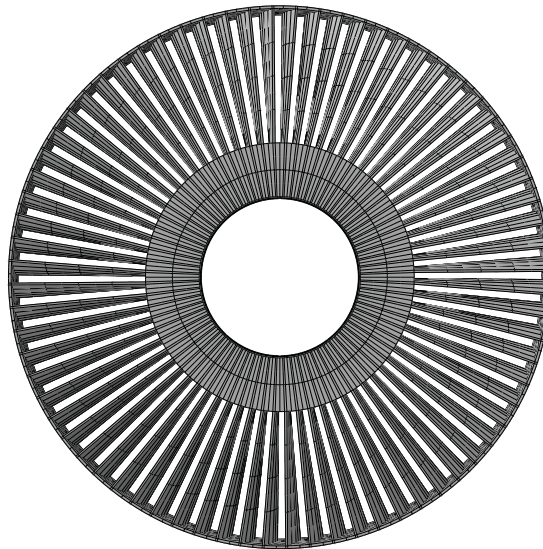
aufgestellt, woraus die  $2n$  komplexen Eigenwerte

$$\lambda_{D,k} = -\zeta\omega_{o,k} \pm j\omega_{D,k} \quad \text{für } k = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

resultieren. Hierbei entspricht  $\omega_{D,k}$  der gedämpften Eigenkreisfrequenz. Durch Einsetzen von  $\lambda_{D,k}$  in Gleichung (2.15) lassen sich die Eigenmoden bestimmen. Somit ergibt sich die allgemeine Lösung für gedämpfte Schwingungen zu

$$\mathbf{u}(t) = \sum_k^n \boldsymbol{\phi}_k e^{\lambda_{D,k} t} + \boldsymbol{\phi}_k^* e^{\lambda_{D,k}^* t}. \quad (2.17)$$

### 2.1.3 Dynamik von Turbinenlaufstufen



**Abbildung 2.2:** Finite Elemente Darstellung einer stark vereinfachten Turbinenlaufstufe

Die allgemeinen Betrachtungen lassen sich auf die Schwingungen von Turbinenlaufstufen übertragen. Zur Berechnung der Dynamik werden Turbinenlaufstufen in diskrete Bereiche unterteilt, die sogenannten finite Elemente. In **Abbildung 2.2** ist ein diskretisiertes Modell einer stark vereinfachten Turbinenlaufstufe dargestellt. Die schwarzen Linien kennzeichnen die Elementengrenzen. Die räumliche Ausdehnung der Elemente wird durch Knoten begrenzt. Das Verhalten dieser Knotenpunkte wird mittels Ansatzfunktionen numerisch angenähert. Anschließend werden die Elemente unter Einhaltung der Randbedingungen zusammengeführt, woraus sich schließlich die Bewegungsgleichung (2.14) formulieren lässt [7]. Die Lösung gestaltet sich identisch zu den vorherigen Abschnitten.

## 2.2 Schwingungsverhalten unverstimmter Turbinenlaufstufen

Zur Charakterisierung des komplexen Schwingungsverhaltens einer Laufstufe wird als erstes der Begriff des Knotendurchmessers anhand der Betrachtung einer einfachen Kreisscheibe eingeführt. Die Schaufeln werden dabei zunächst idealisiert als mitschwingende Starrkörper angesehen. Darauf folgend wird das Schwingungsverhalten einer Schaufel erläutert, bevor die Erkenntnisse auf das Vollmodell der Turbinenlaufstufe übertragen werden.

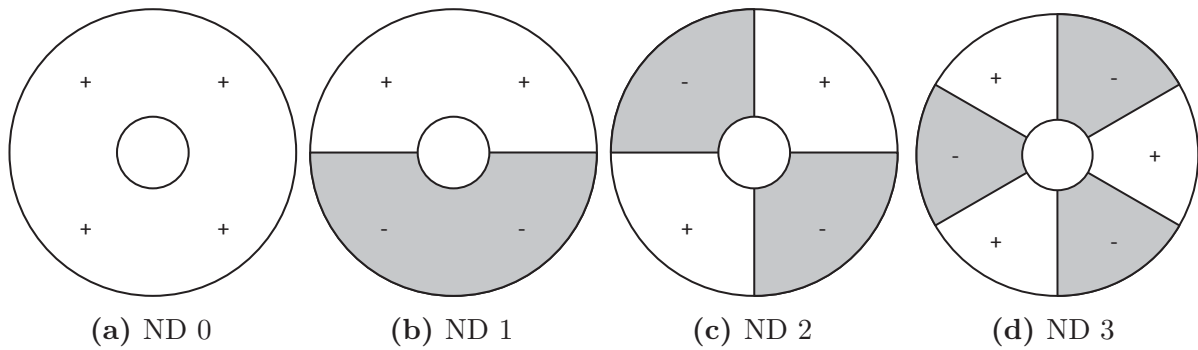
### 2.2.1 Knotendurchmesserlinien

Charakteristisch für die Schwingung zyklisch symmetrischer Strukturen ist das Auftreten von sogenannten Knotendurchmesserlinien. Dies sind Linien durch den Mittelpunkt, welche für die jeweils betrachtete Schwingungsform keine Amplitude aufweisen und gegenphasig-schwingende Sektoren abtrennen. Die Angabe des Knotendurchmessers (engl. **Nodal Diameter**, ND) gibt die Anzahl dieser Linien an. Für Turbinenlaufstufen beschreibt die maximal mögliche Anzahl den Fall, bei dem bei gerader Schaufelanzahl  $N$  alle benachbarten Schaufeln gegenphasig schwingen und ist dadurch lediglich durch die Anzahl an Schaufeln festgelegt

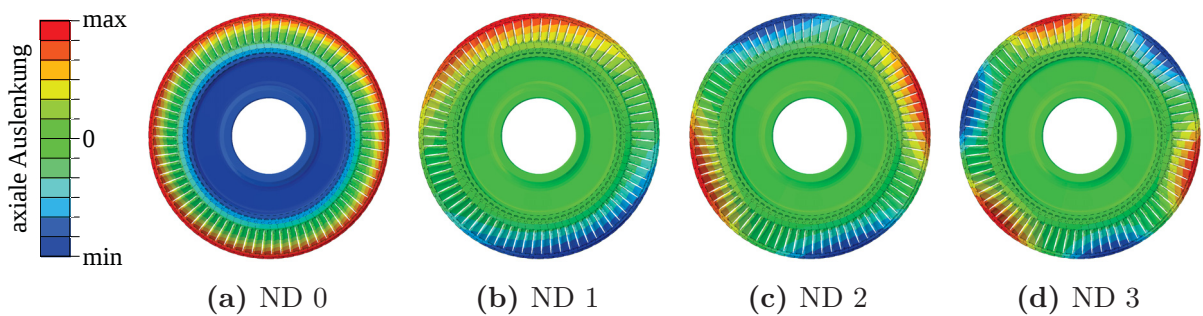
$$ND_{max} = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{für } N = \text{gerade} \\ \frac{N-1}{2} & \text{für } N = \text{ungerade}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Für die Knotendurchmesser treten doppelte Eigenmoden auf [29]. Eine Ausnahme davon stellt der Knotendurchmesser 0 dar, bei dem ein einfacher Eigenmode auftritt. Hierbei schwingen alle Schaufeln phasengleich. Aufgrund seiner charakteristischen Form wird er auch „Umbrella“-Mode genannt [19]. Des Weiteren ergibt sich bei gerader Schaufelanzahl für den  $ND_{max}$  ebenfalls ein einfacher Eigenmode.

In **Abbildung 2.3** sind exemplarisch vier Knotendurchmesser an einer schematischen Kreisscheibe dargestellt. Zur besseren Veranschaulichung im Bezug auf Turbinenlaufstufen zeigt **Abbildung 2.4** das Auftreten der Knotendurchmesser an einem realitätsnahen Modell.



**Abbildung 2.3:** Schematische Darstellung von Knotendurchmesserlinien



**Abbildung 2.4:** Knotendurchmesserlinien an einem realitätsnahen Modell

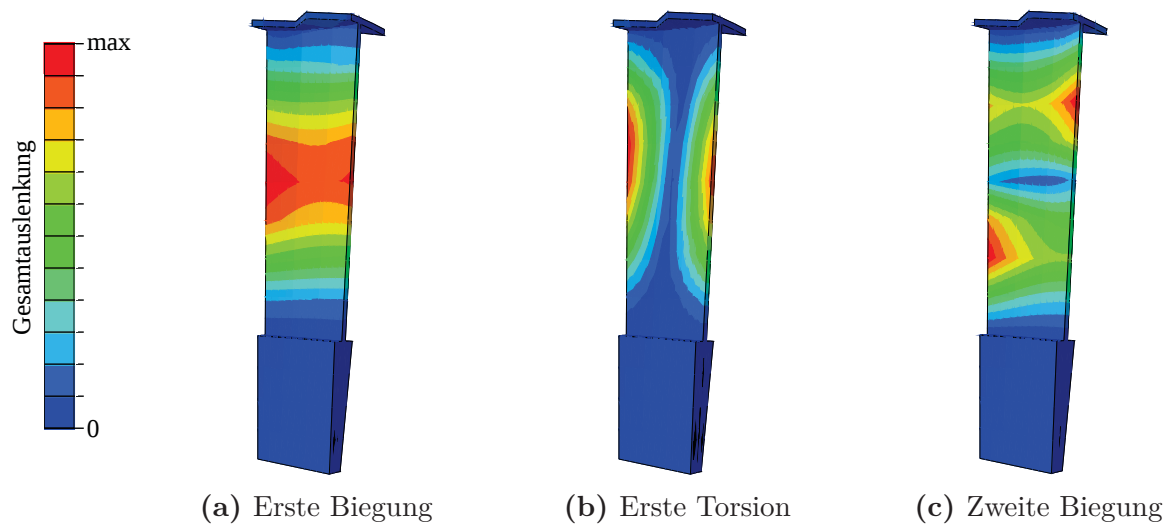
### 2.2.2 Schaufelschwingungen

Zur Beschreibung des Schwingungsverhaltens von Schaufeln wird in der Literatur häufig die stark vereinfachte Darstellung als Platte verwendet (siehe u. a. [19]). Davon wird auch die Charakterisierung der Schaufeleigenmoden abgeleitet. Hierbei bilden sich zuerst die fundamentalen Schwingungsformen erste Biegung ( $1F^2$ ), erste Torsion ( $1T$ ) und zweite Biegung ( $2F$ ) aus. Dieses Verhalten lässt sich auch in **Abbildung 2.5** an einem stark vereinfachten Modell erkennen.

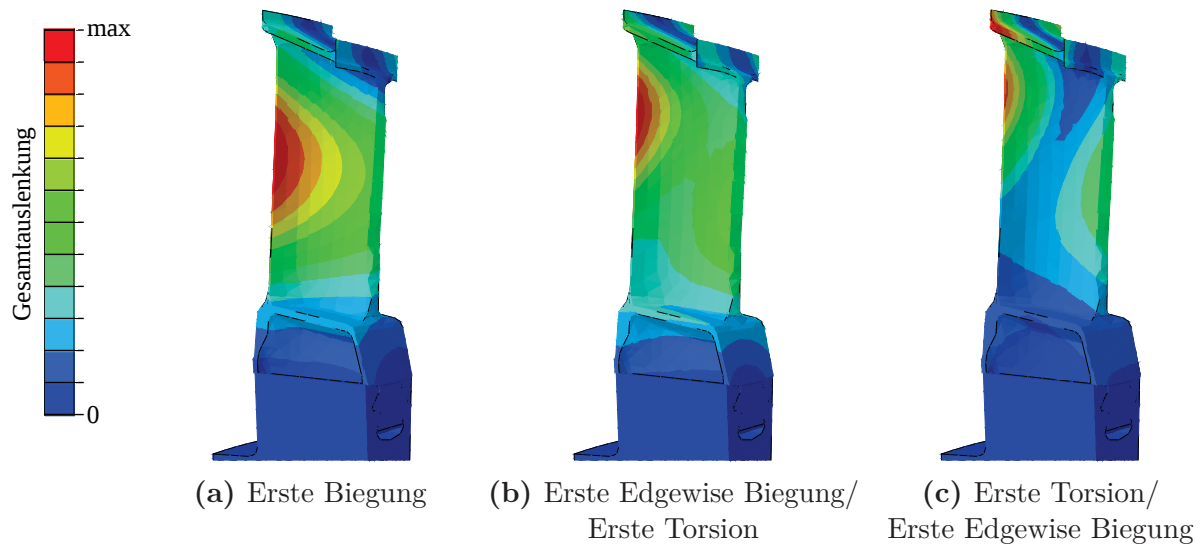
Bei höheren Moden bilden sich in Abhängigkeit der Schaufelgeometrie weitere, im Allgemeinen komplexere, Schwingungsformen [29]. In der Realität sind Schaufeln stark verwunden und ohne ausgeprägte Symmetrieeigenschaften. Zudem zeigt die Deckbandkopplung einen Einfluss auf die Schwingungsform. Dadurch weisen reale Schaufeln oft komplexe gemischte

<sup>2</sup>engl. Flap





**Abbildung 2.5:** Schaufelschwingungen einer stark vereinfachten Turbinenlaufstufe



**Abbildung 2.6:** Schaufelschwingungen einer realitätsnahen Turbinenlaufstufe

Schwingungsformen auf, welche sich nicht immer eindeutig einer der genannten fundamentalen Schwingungsformen zuordnen lassen [23]. Nach Srinivasan [28] ist beispielsweise die Verdrehung der Schaufeln dafür verantwortlich, Torsionsanteile der Biegung zu überlagern. Diese Eigenschaften zeigen sich in **Abbildung 2.6** in den ersten drei Schwingungsformen an einem realitätsnahen Modell. Hier bildet sich zuerst die erste Biegung aus. Als zweite und dritte Mode tritt eine Mischform der ersten Edgewise Biegung und ersten Torsion auf.

### 2.2.3 Schwingungsverhalten von Turbinenlaufstufen

Die Turbinenlaufstufe besteht aus der rotationssymmetrischen Scheibe sowie den Schaufeln, die äquidistant über den Umfang verteilt sind. Aufgrund der zyklischen Symmetrie lässt

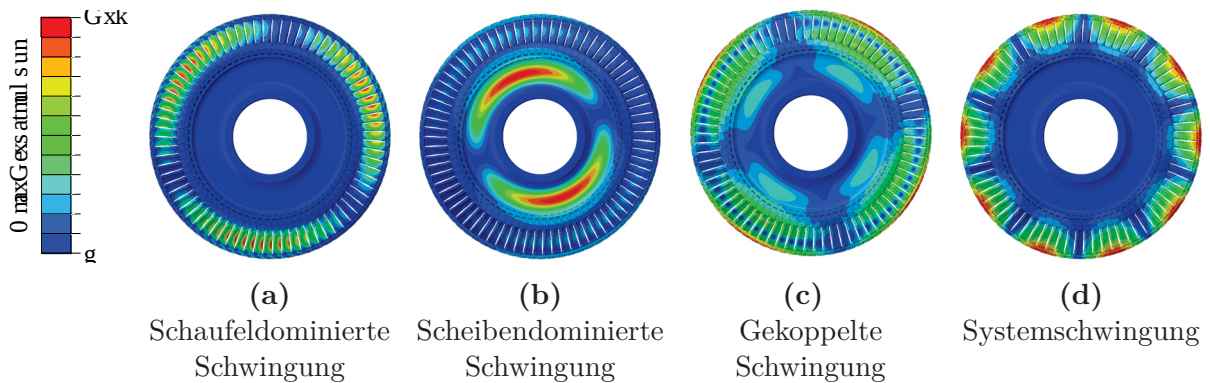
sich eine unverstimmte Turbinenlaufstufe in identische Sektoren unterteilen. Unverstimmt bedeutet in diesem Zusammenhang, dass alle Sektoren in ihrer Geometrie und Materialeigenschaft identisch sind<sup>3</sup>. Beim Schwingungsverhalten der einzelnen Sektoren ist die Amplitude, Form und Frequenz identisch. Allerdings ist die Schwingung um den Schaufelphasenwinkel  $\beta$  (engl. **I**nter **B**lade **P**hase **A**ngle, IBPA) verschoben. Dieser berechnet sich unter Verwendung des Knotendurchmessers  $ND$  und Anzahl der Sektoren  $N$  zu

$$\beta = \frac{2\pi ND}{N} \quad \text{für } ND = 0, \dots, ND_{max}. \quad (2.19)$$

Die Einteilung der Laufstufe in identische Sektormodelle unter Verwendung zyklisch symmetrischer Randbedingungen ist aufgrund der nun deutlich verringerten Freiheitsgradanzahl im Vergleich zum Vollmodell besonders vorteilhaft.

Zudem lassen sich die Schwingungen in schaufeldominierte, scheibendominierte sowie gekoppelte Schwingungen aufteilen [16][17]. Ausschlaggebend ist hierbei die Verteilung der Verzerrungsenergie innerhalb des Sektors. Dazu wird die Verzerrungsenergie der Schaufel ins Verhältnis zur Gesamtverzerrungsenergie des Sektors gesetzt

$$W = \frac{W_{Schaufel}}{W_{gesamt}}. \quad (2.20)$$



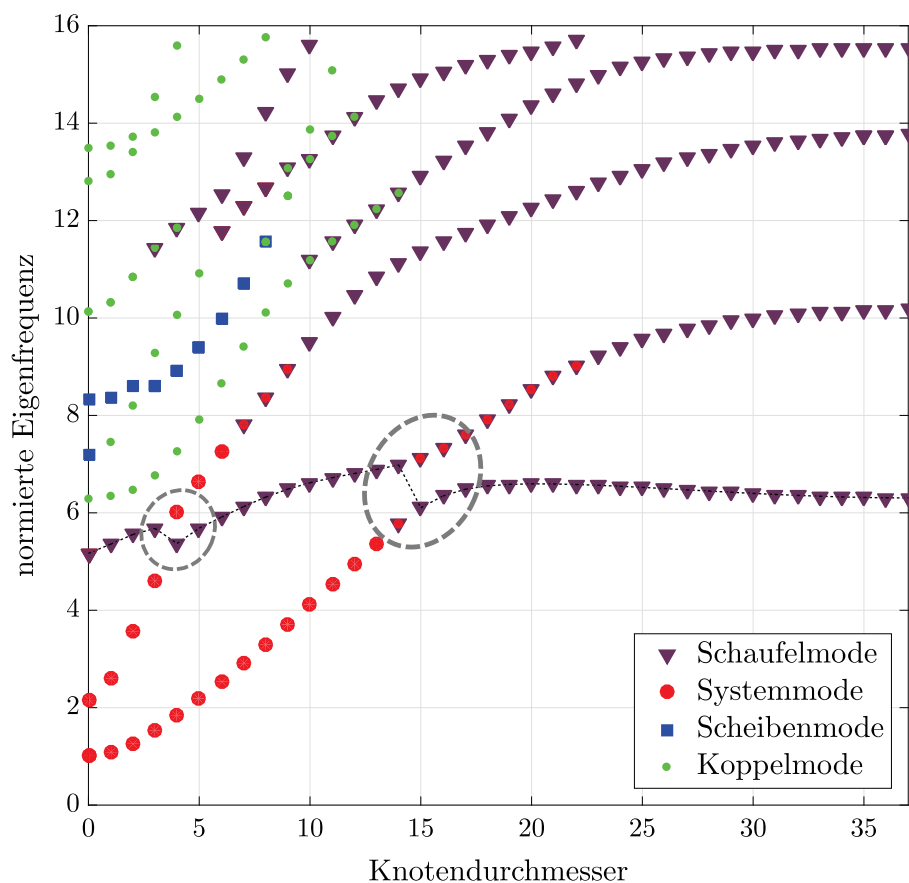
**Abbildung 2.7:** Grundtypen der Schwingungsformen

Je größer dieses Verhältnis ist, umso stärker dominiert die Schaufel das gesamte Schwingungsverhalten des Sektors (siehe **Abbildung 2.7a**). Je niedriger dieses Verhältnis ist, desto stärker dominiert die Scheibe das gesamte Schwingungsverhalten des Sektors (siehe **Abbildung 2.7b**). Als dritte Schwingungsform treten gekoppelte Schwingungen auf, bei denen sich die Verzerrungsenergie in etwa gleichen Teilen auf die Scheibe und Schaufel aufteilt (siehe **Abbildung 2.7c**).

<sup>3</sup>Dies stellt jedoch eine Idealisierung dar, so dass in der Literatur auch oft der Begriff ideales System verwendet wird

Darüber hinaus treten Systemschwingungen auf (siehe **Abbildung 2.7d**). Hierbei schwingt die Turbinenlaufstufe als Verbundsystem und die Schaufeln können als mitschwingende Starrkörper angesehen werden. Die Verzerrungsenergie konzentriert sich auf das Deckband. Im Hinblick auf Verstimmung sind besonders schaufeldominierte Schwingungsformen relevant. Bei diesen konzentriert sich die Verzerrungsenergie auf die Schaufel, so dass bereits geringfügige Änderungen der Schaufeleigenschaften große Auswirkungen auf das Schwingungsverhalten zeigen. Aus diesem Grund stellen diese den Fokus der Arbeit dar.

## 2.2.4 Knotendurchmesserdiagramm



**Abbildung 2.8:** Knotendurchmesserdiagramm einer realitätsnahen Turbinenlaufstufe

Die Eigenfrequenzen einer Turbinenlaufstufe lassen sich als Funktion des Knotendurchmessers darstellen (siehe **Abbildung 2.8**). Bei niedrigen Knotendurchmessern sind die Systemschwingungen sowie Schwingungen der Scheibe dominant. Mit zunehmendem Knotendurchmesser gehen diese in schaufeldominierte Schwingungsformen über. Dieser Übergang der Schwingungsformen ist in dem Knotendurchmesserdiagramm durch Überlagerung der Symbole dargestellt. Hierbei ist eine eindeutige Zuordnung zu einer der Schwingungsformen nicht möglich. Des Weiteren versteift sich die Schaufel. Dementsprechend ergibt sich

auch eine erhöhte Einspannsteifigkeit der Schaufel, wodurch die Eigenfrequenzen ansteigen. Bei hohen Knotendurchmessern kann zudem der Einfluss der Deckbandkopplung zu einem weiteren Anstieg der Eigenfrequenzen führen.

Anhand der schwarz gepunkteten Linie ist der Verlauf der Modefamilien der ersten Biegung gekennzeichnet. Als Modefamilie werden Eigenmoden mit ähnlichen Schwingungsformen für die Knotendurchmesser bezeichnet. Dies lässt sich für die erste Biegemode gut erkennen. Für die betrachteten Mischformen der ersten Edgewise Biegung und der ersten Torsion lassen sich keine kompletten Modefamilien über alle Knotendurchmesser identifizieren.

In dem Knotendurchmesserdiagramm zeigen sich Veering-Regionen. Diese sind durch grau gestrichelte Kreise gekennzeichnet. Das beschreibt Regionen, bei denen sich die Verläufe der Eigenfrequenzen zweier Modefamilien stark annähern und anschließend wieder auseinander gehen. In diesen Bereichen kann sich ein besonders großer Einfluss von Verstimmung zeigen [20].

## 2.3 Fremderregte Schwingungen unverstimmter Turbinenlaufstufen

### 2.3.1 Anregungsmechanismen von Turbinenlaufstufen

Die in **Abschnitt 2.2** erläuterten Schwingungsformen können durch verschiedene Mechanismen angeregt werden. Dabei sind für Turbinenlaufstufen vor allem fremderregte synchrone Schwingungen, Flattern und fremderregte nicht-synchrone Schwingungen relevant. **Abbildung 2.9** zeigt das CAMPBELL-Diagramm [4] aus einer Messung einer Turbinenlaufstufe bei der MTU Aero Engines AG [13].

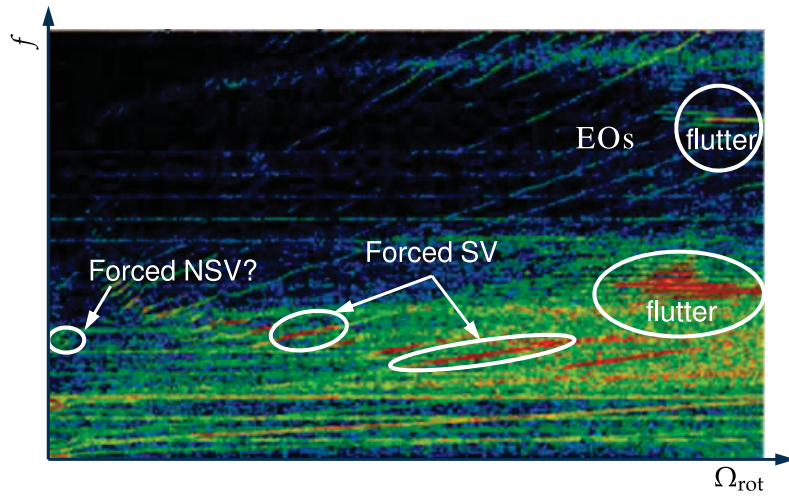
Die Abszisse zeigt die Drehzahl der Turbinenlaufstufe  $\Omega_{rot}$  und die Ordinate die Eigenfrequenzen  $f$ . Die maximalen Schwingungsamplituden sind in rot gekennzeichnet. Des Weiteren lassen sich die Eigenfrequenzen als annähernd waagerechte Linien und die Erregerordnungen als Geraden durch den Ursprung mit konstantem Anstieg erkennen. Eine ausführliche Beschreibung dazu folgt in **Abschnitt 2.3.2**.

Fremderregte synchrone Schwingungen (Forced SV<sup>4</sup>) werden durch periodische Schwankungen der auf das System wirkenden Gaskräfte hervorgerufen. Diese treten im CAMPBELL-Diagramm bei Kreuzungen der Eigenfrequenzen und Erregerordnungen auf.

Flattern (flutter) ist eine selbsterregte Schwingung, welche durch eine Wechselwirkung zwischen dem schwingenden System und dem umgebenden Fluid hervorgerufen wird. Hierbei kommt es zu einer Rückkopplung der Schaufelschwingung und der aerodynamischen Kräfte.

---

<sup>4</sup>engl. Forced Synchronous Vibration



**Abbildung 2.9:** Reales CAMPBELL-Diagramm aus einer Messung einer Turbinenlaufstufe bei der MTU Aero Engines AG [13]

Die Rückkopplung führt dabei so lange zu exponentiell anwachsenden Schwingungen, bis nichtlineare Effekte eintreten oder es zum Versagen der Schaufel kommt.

Außerdem existieren fremderregte nicht-synchrone Schwingungen (Forced NSV). Diese können unter anderem aufgrund von Wirbelablösungen an der Schaufel auftreten [22].

In dem CAMPBELL-Diagramm lassen sich fremderregte synchrone Schwingungen und Flattern klar erkennen. Eine fremderregte nicht-synchrone Schwingung ist hingegen nicht eindeutig identifiziert.

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf den Analysen der fremderregten synchronen Schwingungen. Zur Übersichtlichkeit werden diese im weiteren Verlauf der Arbeit lediglich als fremderregte Schwingungen bezeichnet.

### 2.3.2 Fremderregung

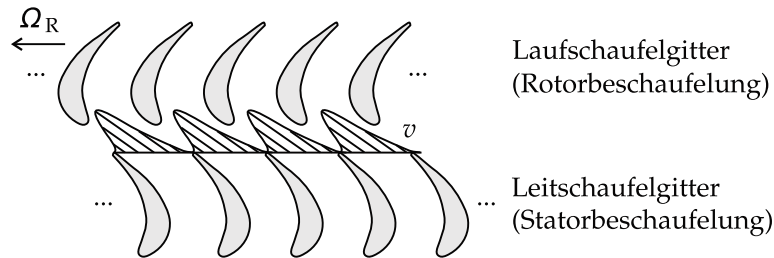
Fremderregung stellt den Hauptanregungsmechanismus von Turbinenlaufstufen dar. Dabei wird dem frei schwingenden System aus Gleichung (2.14) eine äußere periodische Kraft  $F(t)$  aufgeprägt. Hierbei wird zwischen stationärer und transientser Anregung unterschieden. Entsprechend ergibt sich die Bewegungsgleichung bei stationärer Anregung zu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_0 \cos(\Omega t) \quad (2.21)$$

und bei transientser Anregung zu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_0 \sin\left(\frac{at^2}{2}\right) \quad \text{mit } a = \frac{\Omega_d}{t_d}. \quad (2.22)$$

Hierbei entspricht  $t_d$  der Zeitdauer bis zum Erreichen der maximalen Erregerkreisfrequenz  $\Omega_d$  der Resonanzdurchfahrt. Somit wird anhand des Parameters  $a$  die Beschleunigungsrate während der Resonanzdurchfahrt beschrieben.



**Abbildung 2.10:** Schematische Darstellung von Nachlaufzellen [23]

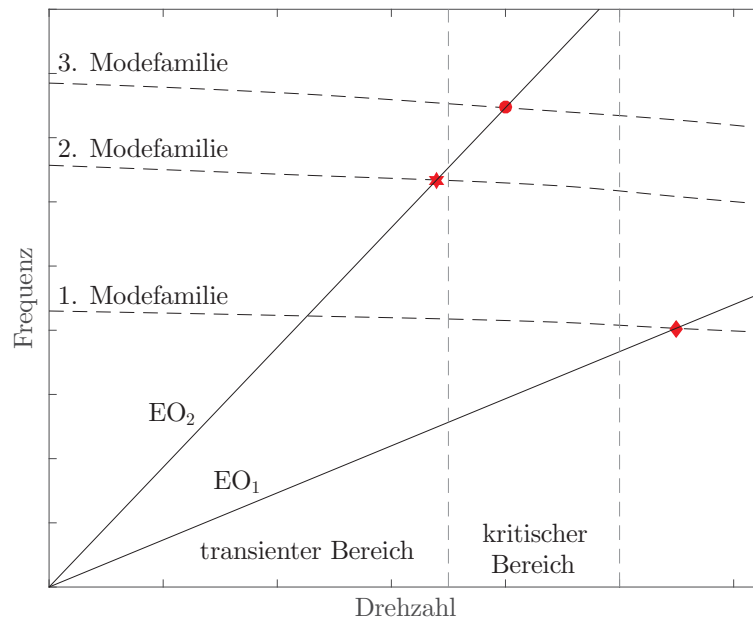
Instationäre Druckschwankungen, welche durch das Durchlaufen von Nachlaufzellen des vorausgehenden Leitschaufelgitters auftreten, stellen im Wesentlichen die Anregung dar. Ebenfalls können nachfolgende Leitschaufelgitter durch den sich einstellenden Staudruck zu einer Anregung führen. Hierbei erfahren die Laufschaufeln aufgrund der lokal verminderten Strömungsgeschwindigkeit eine periodische Anregung in Höhe der Leitschaufelanzahl  $N_{Stator}$  und deren Vielfachen je Umdrehung. **Abbildung 2.10** zeigt die Schwankungen in Höhe der Leitschaufelanzahl. Die Anzahl der gleichmäßig über den Umfang verteilten Druckschwankungen bestimmt die sogenannte Erregerordnung (engl. **Engine Order**, EO) der fremderregten Schwingung. Hieraus ergeben sich die im weiteren Verlauf der Arbeit betrachteten Erregerordnungen zu

$$EO = k \cdot N_{Stator} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

Anhand des CAMPBELL-Diagramms ist es möglich die Drehzahlbereiche zu bestimmen, bei denen während des Betriebs die Eigenfrequenzen der Turbinenlaufstufe die Erregerordnungen kreuzen. Hierbei kommt es zu Resonanzen und in Folge dessen kann es zur Ausprägung maximaler Schwingungsamplituden kommen. In **Abbildung 2.11** ist ein schematisches CAMPBELL-Diagramm dargestellt. Innerhalb der senkrechten Linien ist der stationäre Betriebsbereich der Turbinenlaufstufe dargestellt. Davor befindet sich der transiente Bereich, der schnell durchfahren wird. Die roten Symbole kennzeichnen die kritischen Resonanzstellen für die betrachteten Erregerordnungen. Dies sind Resonanzen im stationären Bereich oder in der Nähe davon.

Dabei sind in der Darstellung die Kreuzungspunkte der Eigenfrequenzen und Erregerordnungen drehzahlweise berechnet. Der weitere Verlauf der Eigenfrequenzen ist interpoliert. Hier ergibt sich mit zunehmender Drehzahl der Turbinenlaufstufe eine Fliehkraftversteifung, wodurch die Eigenfrequenzen ansteigen. Dementgegen führt eine Erhöhung der Temperatur zu einer Reduktion des Elastizitätsmoduls und somit auch der Eigenfrequen-



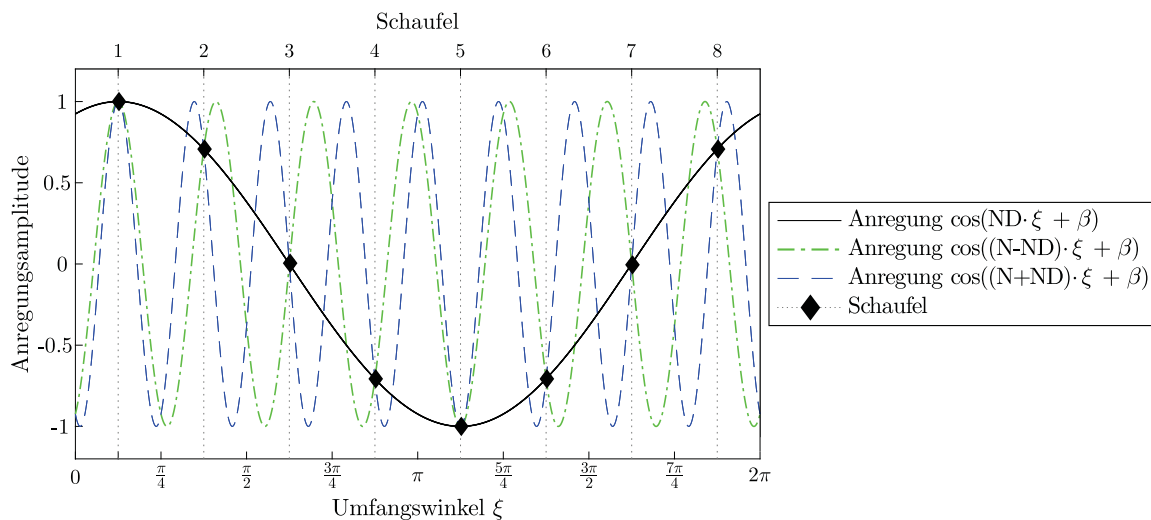


**Abbildung 2.11:** Schematisches CAMPBELL-Diagramm einer unverstimmten Turbinenlaufstufe

zen. Deshalb ist eine genaue Kenntnis der Drehzahl und Temperatur notwendig, um die Resonanzfrequenzen exakt abzubilden.

### 2.3.3 Aliasing

Eine Erregerordnung regt den Knotendurchmesser an, der der Erregerordnung entspricht. Die Anzahl an Knotendurchmessern ist nach Gleichung (2.18) durch die Schaufelanzahl  $N$  beschränkt. Allerdings ist auch eine Anregung durch Erregerordnungen, die größer als  $ND_{max}$  sind, möglich. Dieser Effekt wird als Aliasing bezeichnet.



**Abbildung 2.12:** Periodische Anregungsverläufe ausgewählter Erregerordnungen

Zur Veranschaulichung wird dazu exemplarisch eine Laufstufe mit 8 Schaufeln angenommen. Dementsprechend ist  $ND_{max} = 4$ . **Abbildung 2.12** zeigt in schwarz die Anregungsamplitude über den Umfang für den Knotendurchmesser  $ND=1$ . Des Weiteren sind die Anregungen mit Erregerordnung 7 ( $N - ND = 8 - 1$ ) und Erregerordnung 9 ( $N + ND = 8 + 1$ ) farblich dargestellt. Die einzelnen Schaufeln sind entsprechend des Umfangswinkels aufgetragen. Es lässt sich erkennen, dass alle Anregungsverläufe die Schaufeln mit der gleichen Amplitude schneiden. Daraus lässt sich schließen, dass alle Erregerordnungen  $N - ND$  und  $N + ND$  den selben Knotendurchmesser  $ND$  anregen. Bei der Erregerordnung  $N - ND$  erfolgt diese Anregung in umgekehrter Drehrichtung. Dies lässt sich besonders kompakt in folgender Formulierung zusammenfassen [33]

$$EO_{alias} = EO - l \cdot N, \quad (2.24)$$

wobei sich  $l$  durch die ganzzahlige Division

$$\frac{EO}{N} = G + R \quad (2.25)$$

mit  $G = \text{ganzzahliger Anteil}$  und  $R = \text{Rest}$  bestimmen lässt. Daraus folgt

$$l = \begin{cases} G & \text{für } R \leq \frac{N}{2} \\ G + 1 & \text{für } R > \frac{N}{2}. \end{cases} \quad (2.26)$$

Eine negative Alias-Erregerordnung beschreibt dabei den Fall einer umgekehrten Drehrichtung<sup>5</sup>.

### 2.3.4 Analyse fremderregter Schwingungen

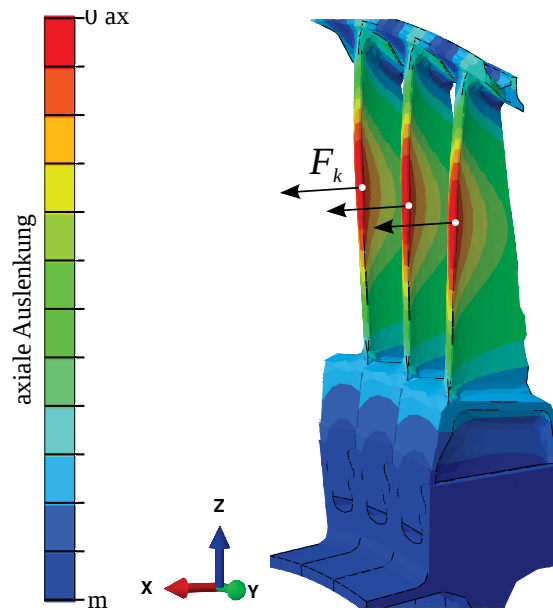
In der Realität erfolgt die Anregung aufgrund eines Druckfeldes, das durch Reibung und Verwirbelung nichtlinear ist. Für strukturmechanische Berechnungen wird in der Regel die vereinfachte Annahme einer linearen und periodischen Anregung getroffen, so dass diese durch ein lineares Anregungsfeld abgebildet werden kann.

Für die durchgeführten Analysen wird das lineare Anregungsfeld in Form einer Anregungskraft in Strömungsrichtung am Knoten der maximalen axialen Auslenkung der Eigenschwingung modelliert. Die Anregungskraft  $F_0$  wird dabei für alle Analysen vereinheitlicht<sup>6</sup>.

<sup>5</sup>Eine Anregung erfolgt normalerweise entgegengesetzt der Drehbewegung der Laufstufe, eine umgekehrte Drehrichtung entspricht somit einer Anregung in Drehbewegung der Laufstufe.

<sup>6</sup>Da im weiteren Verlauf der Arbeit Verhältnisse analysiert werden, führt dies im linearen Fall zu keiner weiteren Einschränkungen



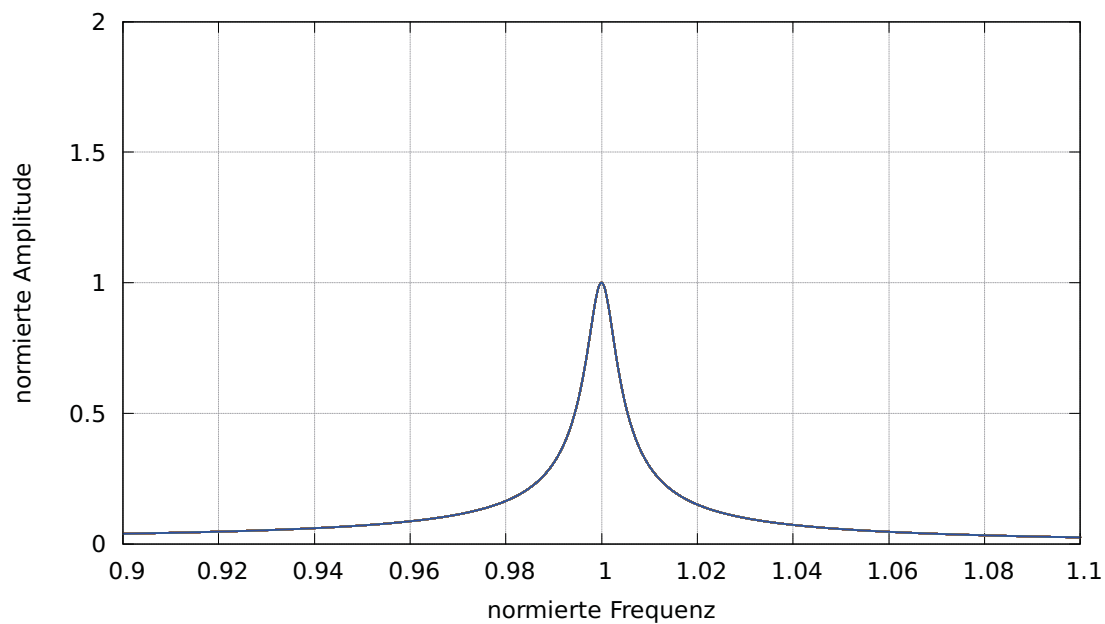


**Abbildung 2.13:** Auslenkung der Eigenschwingung in Strömungsrichtung mit Darstellung der Anregungsmodellierung

Zur Fremderregung einer Schwingung muss die Anregungsfrequenz einer Eigenfrequenz der Turbinenlaufstufe entsprechen. Des Weiteren muss die Anregungsverteilung mit der Eigenschwingungsform übereinstimmen. Dazu muss der Phasenwinkel der Erregerordnung bzw. Alias-Erregerordnung gleich dem Phasenwinkel der Eigenschwingungsform sein. Daraus leitet sich die äquivalente lineare Anregung ab

$$\begin{aligned}
 F_{k,real} &= F_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi EO(k-1)}{N}\right) \quad \text{für } k = 1, \dots, N \\
 F_{k,imaginär} &= F_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi EO(k-1)}{N}\right) \quad \text{für } k = 1, \dots, N.
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Durch Einsetzen in Gleichung (2.21) und Lösen des Gleichungssystems ergibt sich die fremderregte Schwingungsantwort des unverstimmten Systems. Die Auswertung erfolgt an dem Knoten mit der maximalen Gesamtauslenkung der fremderregten Schwingung. **Abbildung 2.14** zeigt die Amplitude über der Frequenz einer unverstimmten Turbinenlaufstufe.



**Abbildung 2.14:** Fremderregte Schwingungsantwort aller Schaufeln einer unverstimmten Turbinenlaufstufe

## 2.4 Fremderregte Schwingungen verstimmter Turbinenlaufstufen

### 2.4.1 Schwingungsverhalten verstimmter Turbinenlaufstufen

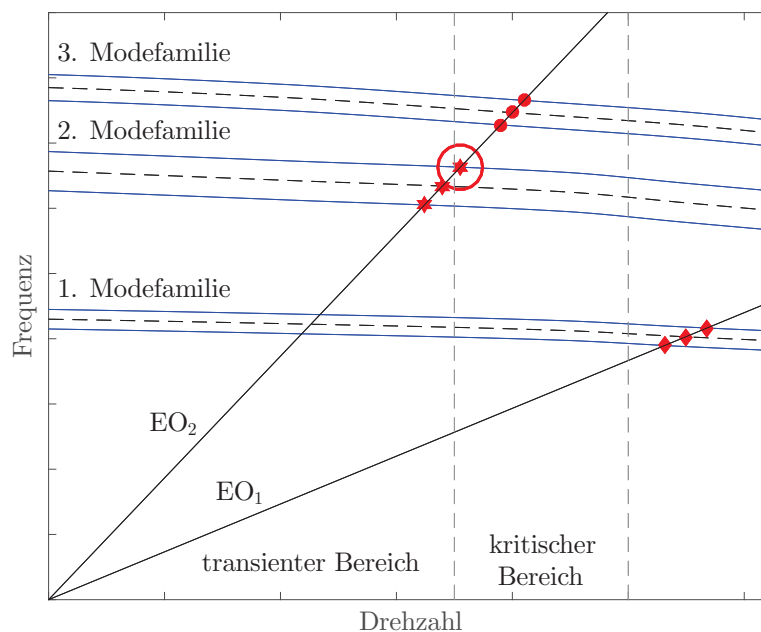
Verstimmung (engl. Mistuning) beschreibt den Fall, bei dem die mechanischen Eigenschaften der Sektoren einer Turbinenlaufstufe unterschiedlich sind. Dadurch wird die zyklische Symmetrie des Systems gestört. In der Realität treten bei einzelnen Schaufeln aufgrund von Fertigungstoleranzen, Materialinhomogenitäten sowie Verschleiß stets Abweichungen auf. Das Auftreten dieser Abweichungen wird in dieser Arbeit als Strukturverstimmung modelliert.

Des Weiteren tritt Verstimmung als Folge unterschiedlicher Kontaktschließungen am Schaufelfuß sowie Deckband auf. Dies wird in dieser Arbeit anhand der Dämpfungsverstimmung modelliert. Die Dämpfung in Turbinenlaufstufen setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Die mechanische Dämpfung besteht dabei aus der strukturellen Dämpfung und den Verlusten durch Reibung an Kontaktstellen am Schaufelfuß und am Deckband. Außerdem ergibt sich ein aerodynamischer Anteil als Folge der Energieabgabe der schwingenden Schaufeln an das umströmende Fluid. Die Angabe der Dämpfungsverstimmung bildet dabei die Dämpfungsanteile kombiniert ab und es erfolgt keine explizite Berechnung der einzelnen Anteile.

## Aufspaltung der doppelten Eigenwerte

Aufgrund des Verlusts der zyklischen Symmetrie tritt eine Aufspaltung der doppelten Eigenwerte in zwei eng benachbarte Eigenwerte auf. Daraus ergeben sich doppelte Eigenmoden für die selben dominierenden Knotendurchmesser mit unterschiedlichen Eigenfrequenzen. Diese werden als Doppelmoden bezeichnet. Je stärker dabei die Verstimmung des Systems ausgeprägt ist, umso stärker fällt auch die Aufspaltung aus [19]. Aufgrund dessen besteht die Schwingung nicht mehr aus einer über den Umfang harmonischen Schwingungsform, sondern setzt sich aus mehreren überlagerten Schwingungen unterschiedlicher Stärke zusammen.

Dieser Einfluss lässt sich auch im CAMPBELL-Diagramm verstimmtter Turbinenlaufstufen erkennen (siehe **Abbildung 2.15**). Anstelle einer eindeutigen Eigenfrequenzlinie tritt ein Eigenfrequenzbereich auf. Dieser umfasst alle Eigenfrequenzen einer Modefamilie der verstimmtten Turbinenlaufstufe. Daraus folgt, dass Resonanzen im gesamten Frequenzbereich einer Modefamilie auftreten können und somit auch in dem dazugehörigen Drehzahlbereich. Dadurch ist es möglich, dass Resonanzen mit Modefamilien, die im transienten Bereich liegen, auch im stationären Bereich zu Schwingungen angeregt werden können. Dies ist in **Abbildung 2.15** mit einem roten Kreis gekennzeichnet.



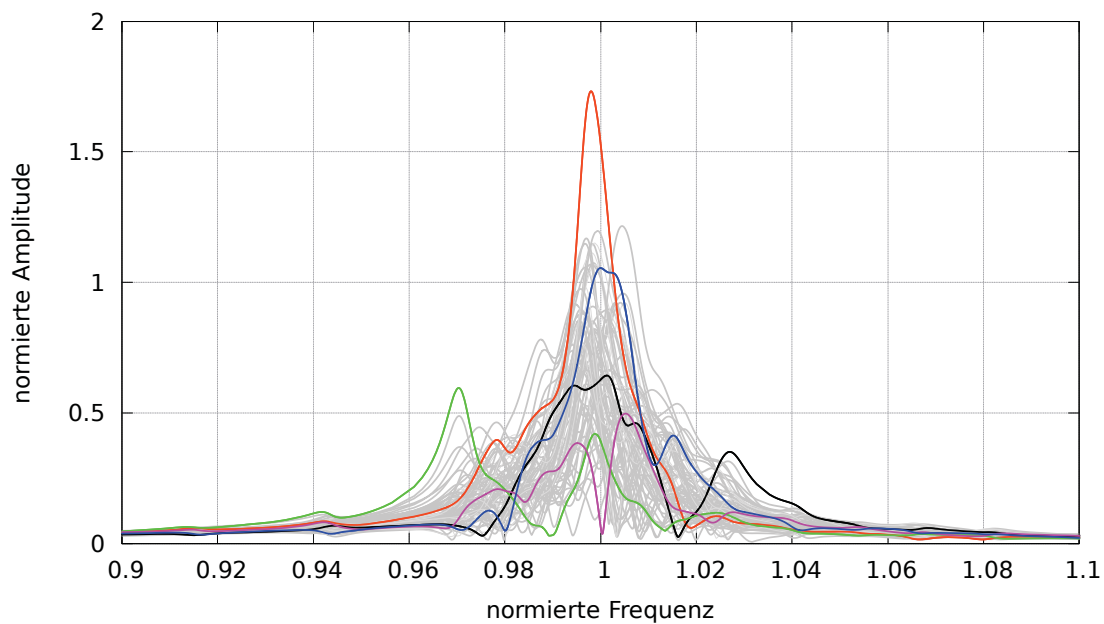
**Abbildung 2.15:** Schematisches CAMPBELL-Diagramm einer verstimmtten Turbinenlaufstufe

## Modelokalisierung

Verstimmung führt des Weiteren zu einer Konzentration der Schwingungsamplitude auf einige wenige Schaufeln. Gleichzeitig nimmt die Schwingungsamplitude der übrigen Schaufeln ab. Dies wird als Modelokalisierung bezeichnet. Dabei kann es bis zu einer vollständigen Lokalisierung kommen, bei der sich die Schwingungsamplitude auf eine einzelne Schaufel konzentriert.

### 2.4.2 Analyse fremderregter Schwingungen

Aufgrund der Verstimmung kann ein Mode nicht mehr nur durch eine Erregerordnung angeregt werden, sondern wird durch mehrere Erregerordnungen angeregt. Im Gegenzug regt somit eine Erregerordnung auch mehrere Moden an. Die Systemantwort ergibt sich aus der Überlagerung der Schwingungen der angeregten Moden. **Abbildung 2.16** zeigt exemplarisch die Schwingungsantwort aller Schaufeln einer verstimmten Turbinenlaufstufe. Zur Übersichtlichkeit sind dabei einzelne Schaufeln farblich abgebildet, wohingegen die restlichen Schaufeln einheitlich in grau dargestellt sind.



**Abbildung 2.16:** Exemplarische fremderregte Schwingungsantwort aller Schaufeln einer verstimmten Turbinenlaufstufe

### 2.4.3 Amplitudenüberhöhung

Durch die Verstimmung ergibt sich eine Erhöhung der fremderregten Schwingungsamplitude im Vergleich zur unverstimmten Turbinenlaufstufe. Obwohl die Abweichungen

der Materialparameter unter den einzelnen Schaufeln sehr gering sind, können hier überproportional große Amplitudenüberhöhungen im Vergleich zum unverstimmten System auftreten. Dies ist vor allem auf die Kopplung zurückzuführen [5]. Durch die so erhöhten dynamischen Spannungen kann die Lebensdauer der Turbinenlaufstufe deutlich verringert sein.

Zur Quantifizierung wird der Amplitudenüberhöhungsfaktor  $\alpha$  verwendet. Dieser ist als das Verhältnis der Schwingungsamplitude je Schaufel (Index  $n$ ) zur Amplitude des unverstimmten Systems definiert

$$\alpha_n = \frac{u_{n,verstimmt}}{u_{unverstimmt}}. \quad (2.28)$$

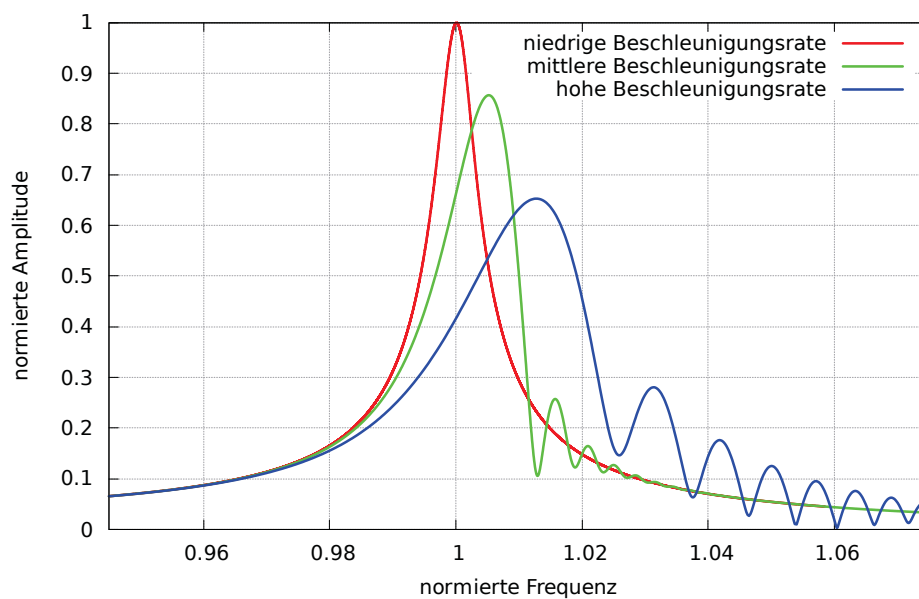
Als konservative Obergrenze wird der Whitehead-Faktor angenommen [32]

$$\alpha_{max} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{N}). \quad (2.29)$$

Dieser gilt unter der Annahme, dass alle Moden gleich gedämpft sind und sich die Schwingung vollständig auf eine Schaufel lokalisiert.

Es sei darauf hingewiesen, dass durch gezielte Verstimmung auch eine Reduktion der Amplitude erzielt werden kann. Dazu sei auf [2] und [26] verwiesen.

## 2.5 Charakteristische Eigenschaften transienter Schwingungen



**Abbildung 2.17:** Resonanzdurchfahrt einer unverstimmten Turbinenlaufstufe bei verschiedenen Beschleunigungsraten

Bei einer Resonanzdurchfahrt kann ein unterschiedliches Verhalten zur stationären Analyse auftreten. In **Abbildung 2.17** ist die Schwingungsantwort einer unverstimmten Turbinenlaufstufe bei zunehmender Beschleunigungsrate dargestellt. Hierbei ist die Frequenz sowie die Amplitude auf die stationäre Analyse normiert.

Für eine niedrige Beschleunigungsrate zeigt die rote Kurve eine vergleichbare Schwingungsantwort zum stationären Fall. Mit zunehmender Beschleunigungsrate lässt sich für die grüne und blaue Kurve eine Verschiebung des Maximums in Beschleunigungsrichtung erkennen. Gleichzeitig ergibt sich eine Reduktion der maximalen Amplitude und Verbreiterung der Resonanzspitze. Zudem treten Schwebungen nach der Resonanz auf.

Somit lassen sich bei zunehmender Beschleunigungsrate die folgenden charakteristischen Eigenschaften einer transienten Schwingungsantwort im Vergleich zur stationären Schwingungsantwort zusammenfassen:

- Verschiebung der Resonanzfrequenz<sup>7</sup>
- Reduktion der maximalen Amplitude
- Verbreiterung der Resonanzspitze
- Auftreten von Schwebungen

In [10] wird nachgewiesen, dass diese Effekte in Abhängigkeit von

- Dämpfung und
- Resonanzfrequenz

auftreten. Dem gegenüber zeigen die Schwingungsform sowie unterschiedliche Kontaktschließungen keinen Einfluss [11].

---

<sup>7</sup>Bei positiver Beschleunigung verschiebt sich die Resonanzfrequenz zu einer höheren Frequenz hin, bei negativer Beschleunigung zu einer niedrigeren Frequenz.

## 3 Probabilistische Grundlagen

### 3.1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Ziel dieser Arbeit ist es anhand systematischer Analysen zu bestimmen, welchen Einfluss unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen für das Elastizitätsmodul und für die modale Dämpfung auf das Schwingungsverhalten von Turbinenlaufstufen zeigen. In **Abbildung 3.1** sind die Dichtefunktionen aller verwendeten Wahrscheinlichkeitsverteilungen dargestellt. Diese werden nachfolgend einzeln näher erläutert.

Alle Verteilungen sind dabei symmetrisch um den Mittelwert  $\mu$  und durch dieselbe untere Grenze  $a$  und obere Grenze  $b$  beschränkt. Dadurch ist eine direkte Vergleichbarkeit der Verteilungen gewährleistet.

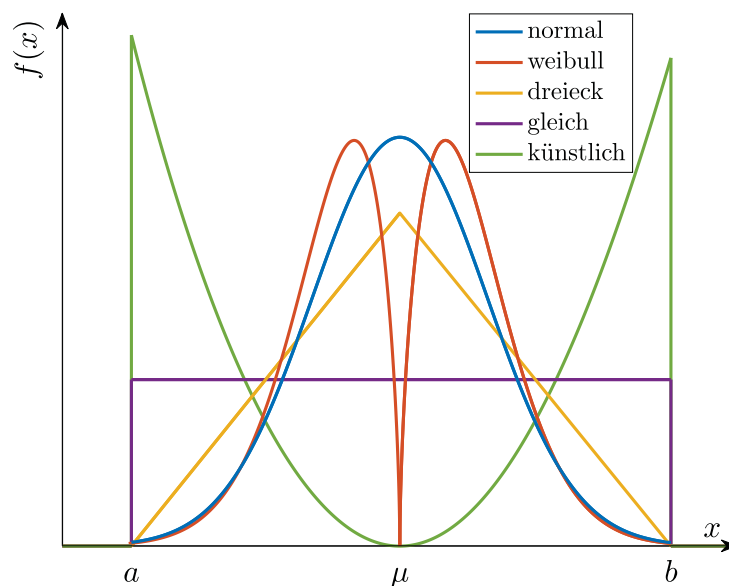


Abbildung 3.1: Dichtefunktionen der verwendeten Wahrscheinlichkeitsverteilungen

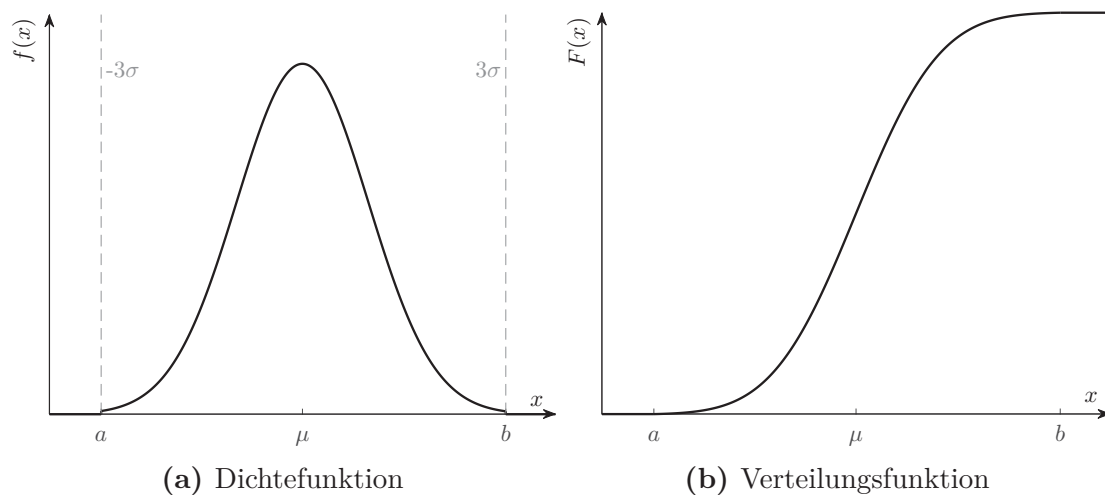
### 3.1.1 Normalverteilung

Die Normalverteilung nach GAUSS beschreibt eine stetige Verteilung um den Mittelwert  $\mu$  im Bereich der reellen Zahlen. Die zugehörige Dichtefunktion lautet

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (3.1)$$

und die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{(\tilde{x} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} d\tilde{x}. \quad (3.2)$$



**Abbildung 3.2:** Normalverteilung

Daraus ergibt sich das globale Maximum der Dichtefunktion bei  $x = \mu$ , sowie zwei Wendepunkte bei  $x = \mu + \sigma$  und  $x = \mu - \sigma$ . Die Normalverteilung ist nicht auf ein vorgegebenes Intervall  $[a, b]$  beschränkt. Deshalb wird die Standardabweichung  $\sigma$  so festgelegt, dass die untere Grenze des Intervalls bei  $a = \mu - 3\sigma$  liegt und die obere Grenze  $b = \mu + 3\sigma$  entspricht. Werte außerhalb des Intervalls  $[a, b]$  werden nicht berücksichtigt.

### 3.1.2 Weibullverteilung

In dieser Arbeit kommt eine modifizierte Form der Weibullverteilung zum Einsatz. Diese wird in Anlehnung an Beirow [1] modelliert, der für die Schaufelfrequenzabweichung eine Weibullverteilung ermittelt hat. Die zugehörige Dichtefunktion unter Verwendung des

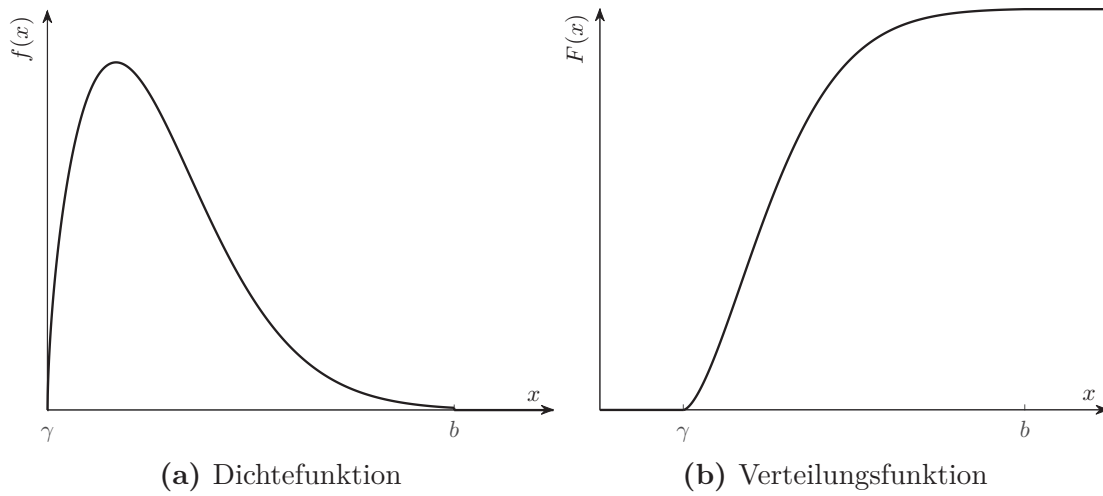


Formparameters  $\kappa$ , Skalenparameters  $\eta$  und Lageparameters  $\gamma$  lautet

$$f(x) = \frac{\kappa}{\eta^\kappa} \cdot (x - \gamma)^{\kappa-1} \cdot \exp \left\{ - \left( \frac{x - \gamma}{\eta} \right)^\kappa \right\}, \quad (3.3)$$

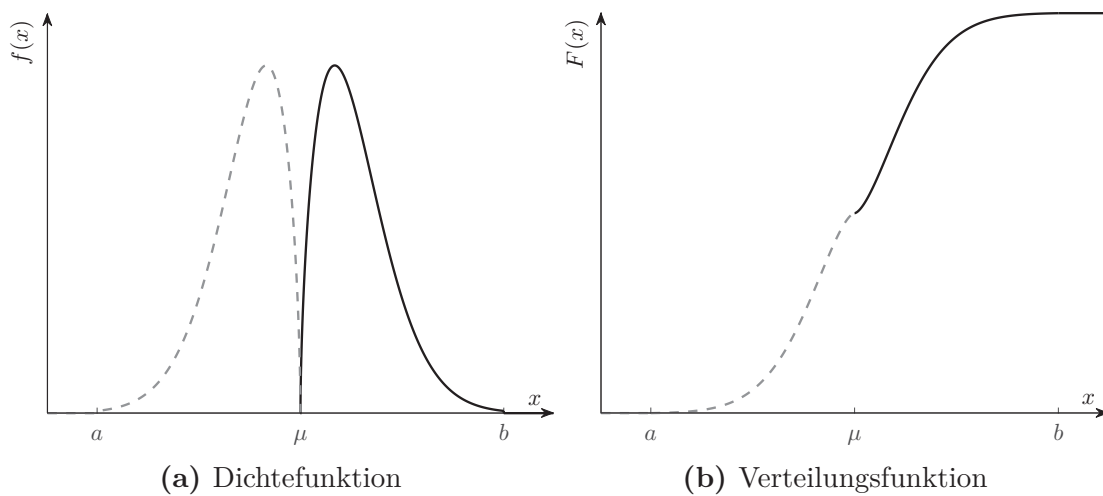
und die Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{x - \gamma}{\eta} \right)^\kappa \right\}. \quad (3.4)$$



**Abbildung 3.3:** Weibullverteilung

Hiermit wird der Betrag der Schaufelfrequenzabweichung beschrieben. Um dadurch sowohl positive als auch negative Abweichungen darstellen zu können, wird das Ergebnis gleichverteilt zufällig mit einem positiven oder negativen Vorzeichen multipliziert. Analog zu der Normalverteilung werden die Werte auf das Intervall  $[a, b]$  beschränkt.



**Abbildung 3.4:** modifizierte Weibullverteilung

### 3.1.3 Gleichverteilung

Als grundlegende Wahrscheinlichkeitsverteilung wird die Gleichverteilung verwendet. Hierbei wird jedem Wert in einem vorgegebenen Intervall  $[a, b]$  die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeteilt. Die Wahrscheinlichkeit außerhalb des Intervalls beträgt Null. Die zugehörige Dichtefunktion lautet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.5)$$

und die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b. \end{cases} \quad (3.6)$$

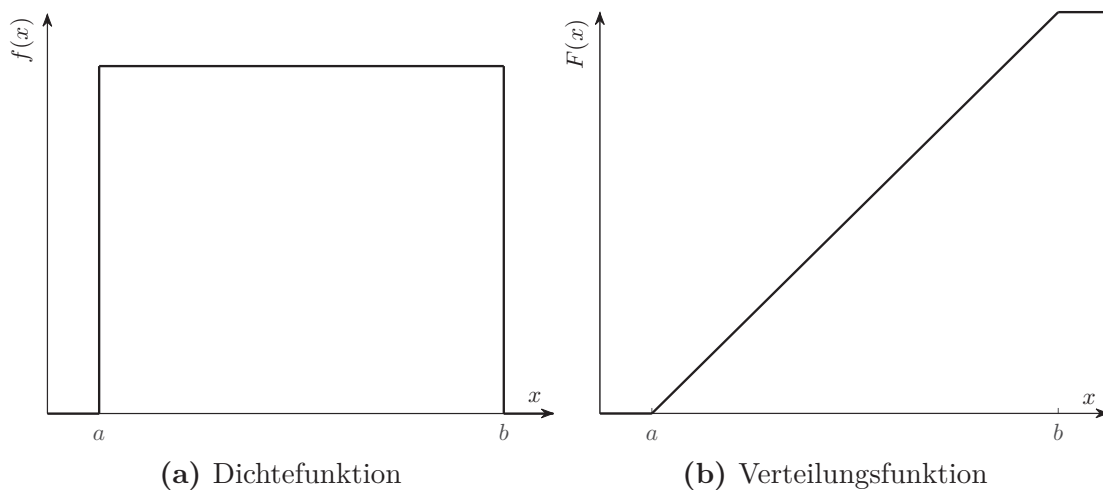


Abbildung 3.5: Gleichverteilung

### 3.1.4 Dreiecksverteilung

Die Dreiecksverteilung beschreibt eine Zufallsgröße deren Argumente im Intervall  $[a, b]$  eine linear verteilte Wahrscheinlichkeitsdichte abbilden. Der Mittelwert  $\mu$  stellt eine Unstetigkeitsstelle dar. Die Wahrscheinlichkeit außerhalb des Intervalls beträgt Null. Die zugehörige Dichtefunktion lautet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(\mu-a)} & a \leq x < \mu \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-\mu)} & \mu \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.7)$$

und die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{(x-a)^2}{(b-a)(\mu-a)} & a \leq x < \mu \\ 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-\mu)} & \mu \leq x \leq b \\ 1 & b < x. \end{cases} \quad (3.8)$$

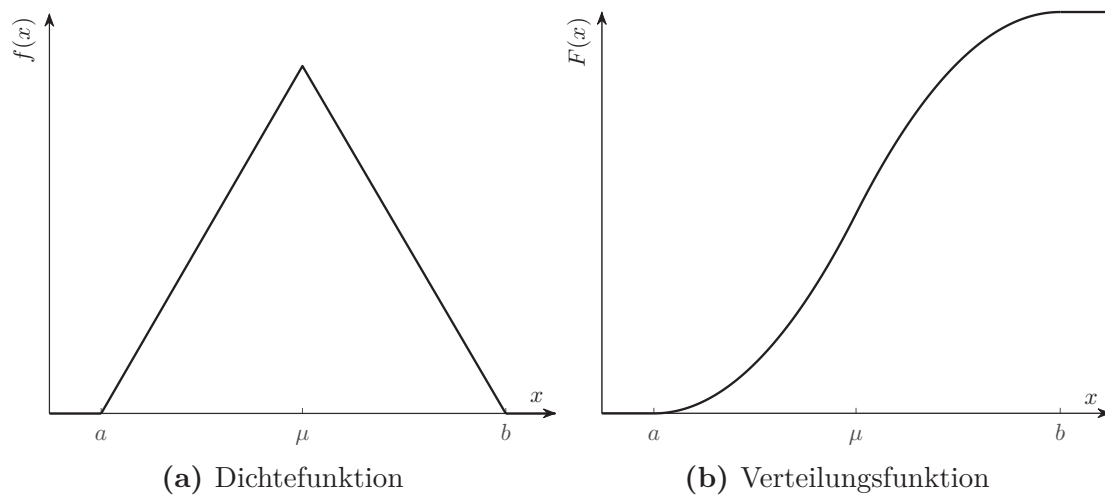


Abbildung 3.6: Dreiecksverteilung

### 3.1.5 Künstliche Verteilung

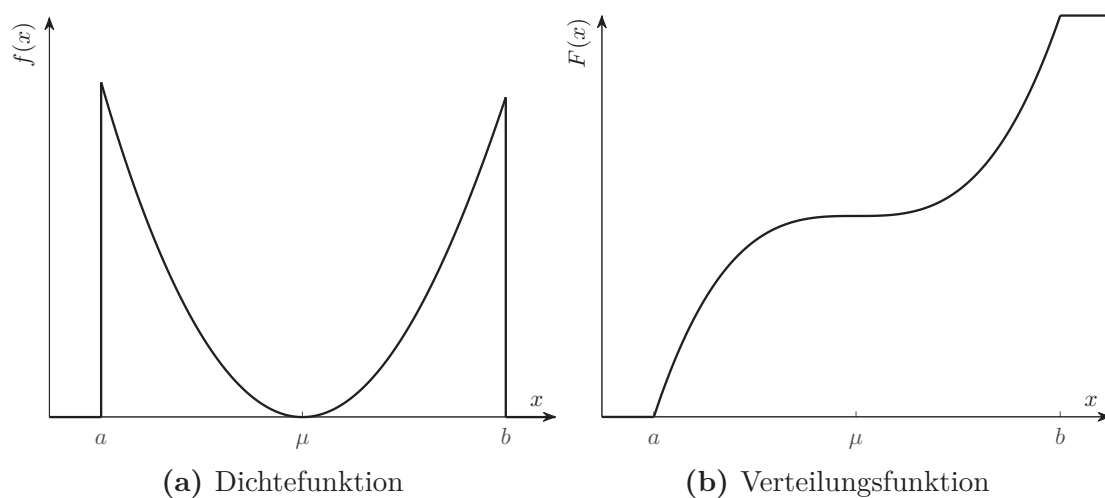


Abbildung 3.7: künstliche Verteilung

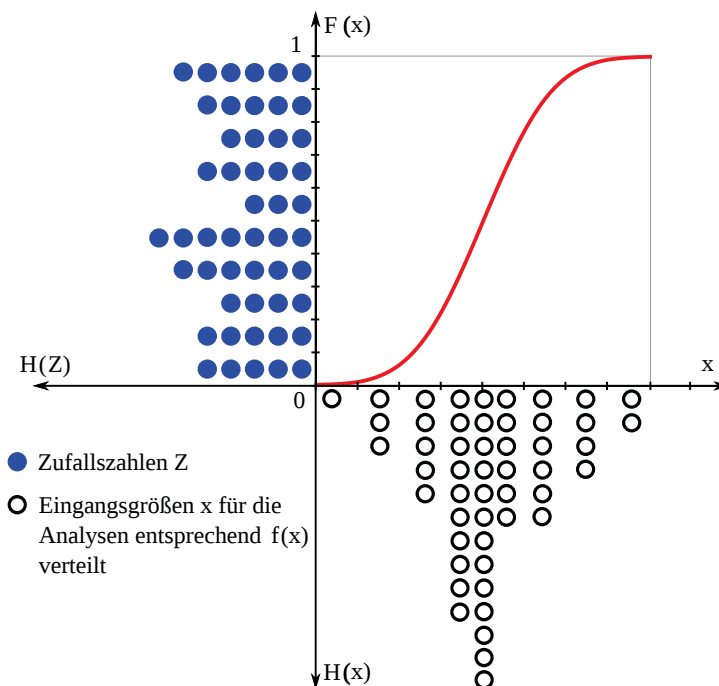
Grundlegende Vorbetrachtungen haben gezeigt, dass eine deutliche Amplitudenüberhöhung in Fällen auftritt, bei denen die Streuung der einzelnen Werte um den Mittelwert groß

ist. Dieser Tatsache bedient sich die künstliche Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dadurch soll eine Annäherung an eine Worst Case Verteilung realisiert werden. Hierzu werden die Parameter einer Weibull-Verteilung so gewählt, dass sich die Dichte- und Verteilungsfunktion innerhalb des Intervalls  $[a,b]$  wie in **Abbildung 3.7** ergeben.

## 3.2 Sampling Methoden

Grundlage der durchgeführten Analysen sind die unabhängigen Eingangsgrößen  $x$  jeder Simulation für das Elastizitätsmodul und die modale Dämpfung mit den Verteilungsfunktionen  $F(x)$ . Anhand der durch Sampling Methoden erzeugten Werte müssen diese Verteilungsfunktionen abgebildet werden.

### 3.2.1 Simple Random Sampling



**Abbildung 3.8:** Schematische Darstellung des Simple Random Samplings

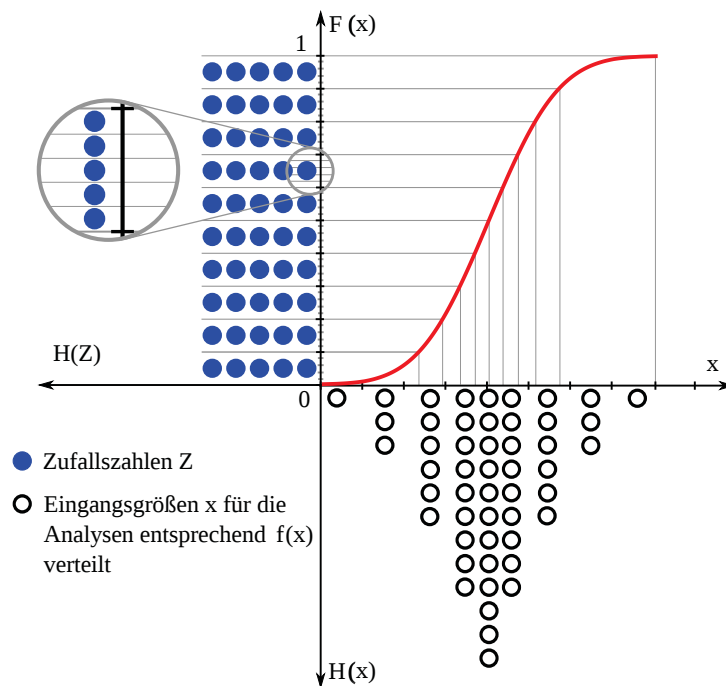
Das Simple Random Sampling (SRS) stellt eine einfach zu implementierende Sampling-Methode dar. Alle Wertekombinationen der Eingangsgrößen  $x$  werden mit einem Zufallszahlengenerator erzeugt. Der Zufallszahlengenerator berechnet dazu mittels eines Initialisierungswerts gleichverteilte Zufallszahlen  $Z$  in einem bestimmten Wertebereich. Diese können anhand der Verteilungsfunktion  $F(x)$  in Werte für die Eingangsgröße  $x$  mit der entsprechenden Häufigkeitsverteilung  $H(x)$  umgewandelt werden.

**Abbildung 3.8** zeigt exemplarisch die Erzeugung normalverteilter Eingangsgrößen mittels

Simple Random Samplings. In blau ist die Häufigkeitsverteilung der Zufallsgröße  $Z$  dargestellt. Die rote Kurve entspricht der Verteilungsfunktion  $F(x)$  der Normalverteilung. Die weißen Kreise zeigen die sich daraus ergebende Häufigkeitsverteilung der Eingangsgröße. Dabei lässt sich für  $x$  eine erhöhte Dichte im mittleren Bereich erkennen. Dies entspricht der Dichtefunktion der Normalverteilung. Aufgrund der zufälligen Verteilung von  $Z$  wird die Dichtefunktion jedoch nicht exakt abgebildet.

Somit hängt von der Verteilung der Zufallsgröße  $Z$  ab, wie genau die Verteilungsfunktion der Eingangsgröße  $x$  abgebildet wird. Daraus ergibt sich eine hohe statistische Unsicherheit bei einer geringen Anzahl an Simulationen [30].

### 3.2.2 Latin Hypercube Sampling



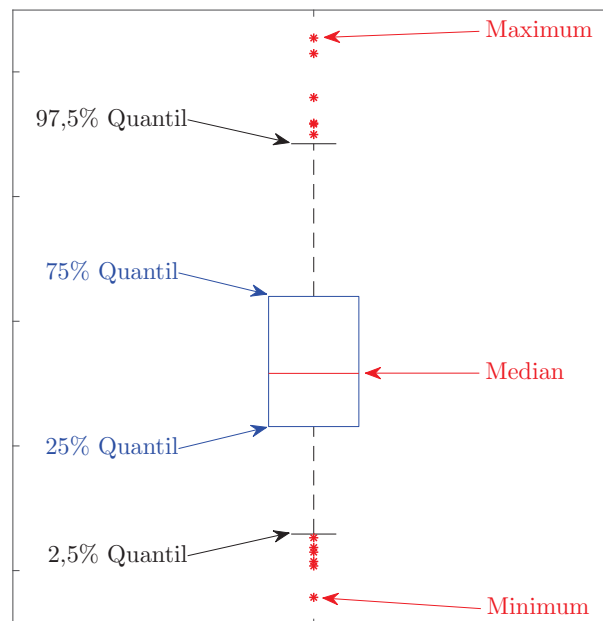
**Abbildung 3.9:** Schematische Darstellung des Latin Hypercube Samplings

Das Latin Hypercube Sampling (LHS) stellt eine Weiterentwicklung des Simple Random Samplings dar. Hierbei wird der Wertebereich der Verteilungsfunktion  $F(x)$  in gleich große Intervalle aufgeteilt. Die Anzahl der Intervalle richtet sich dabei nach der Anzahl der zu erzeugenden Eingangsgrößen  $x$ . Innerhalb jedes Intervalls wird eine Zufallszahl  $Z$  erzeugt und dann analog zum Simple Random Sampling in den Wertebereich der Eingangsgrößen  $x$  transformiert. Durch dieses Verfahren wird eine genauere Abdeckung des Wertebereichs der Eingangsgrößen sichergestellt.

**Abbildung 3.9** zeigt exemplarisch die Erzeugung normalverteilter Eingangsgrößen mittels Latin Hypercube Samplings. Es zeigt sich, dass die Dichtefunktion der Normalverteilung

exakt abgebildet wird. Daraus folgt, dass auch bei wenigen Realisierungen nur eine geringe Varianz auftritt.

### 3.3 Box-Plot

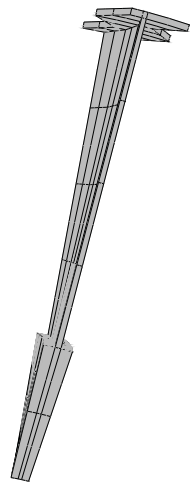


**Abbildung 3.10:** Schematische Darstellung des Box-Plots mit Bezeichnung der Parameter

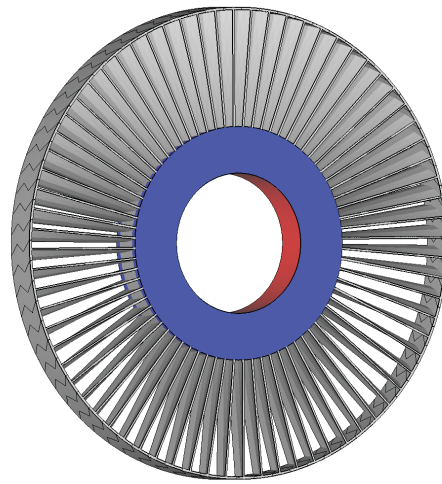
Die Darstellung des Box-Plots enthält verschiedene Parameter der Statistik, welche die Beschreibung der Lage und Streuung der Daten ermöglichen. Ein Box-Plot besteht dabei prinzipiell aus einem Rechteck (Volllinie, blau) und zwei vertikalen Linien (Strichlinie, schwarz). Diese Linien werden auch als Whisker bezeichnet und beginnen an der oberen bzw. unteren Kante des Rechtecks. Die Oberkante des Rechtecks beschreibt das 75%-Quantil und die untere Kante das 25%-Quantil. Innerhalb des Rechtecks liegen somit 50% der ausgewerteten Daten. Die Höhe des Rechtecks kann entsprechend als Streuungsmaß genutzt werden. Die Box beinhaltet zudem eine horizontale Linie, durch welche der Median eingezeichnet wird. Dieser gruppiert die Daten mittig in zwei Bereiche und ermöglicht durch seine Lage innerhalb der Box eine Aussage über die Schiefe der Stichprobe. Während ein Median im unteren Bereich der Box auf eine rechtsschiefe Verteilung hindeutet, zeigt dieser im oberen Bereich eine linksschiefe Verteilung der Daten. Das obere Ende der Whisker wird in dieser Arbeit als das 97,5%-Quantil und das untere Ende als das 2,5%-Quantil definiert. Werte, die außerhalb dieser Grenze liegen, werden statistisch als Ausreißer behandelt.

## 4 Analysierte Modelle und verwendete Tools

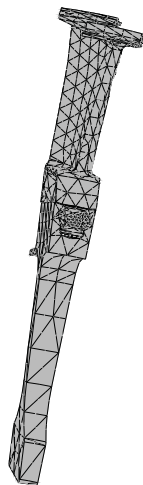
### 4.1 Analysierte Modelle



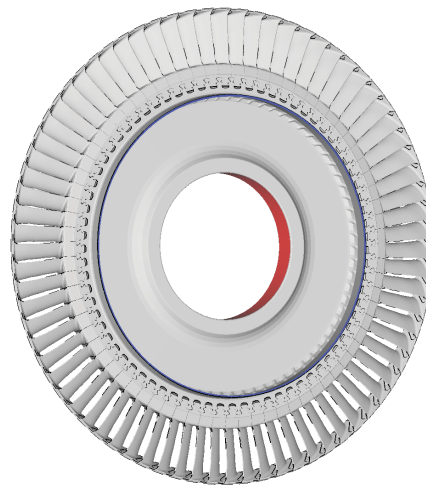
(a) Sektormodell der stark vereinfachten Turbinenlaufstufe



(b) Vollmodell der stark vereinfachten Turbinenlaufstufe



(c) Sektormodell der realitätsnahen Turbinenlaufstufe



(d) Vollmodell der realitätsnahen Turbinenlaufstufe

**Abbildung 4.1:** Analysierte Modelle mit Randbedingungen

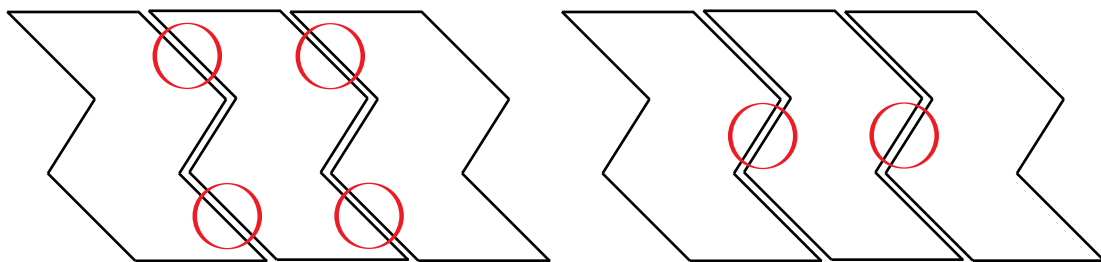
Die durchgeführten Analysen basieren auf zwei Modellen. Im weiteren Verlauf werden diese als „stark vereinfachtes Modell“ und „realitätsnahes Modell“ bezeichnet.

Das stark vereinfachte Modell besteht aus 72 Schaufeln, die integral mit der Scheibe verbunden sind. Das realitätsnahe Modell besteht aus 75 Schaufeln, die mittels Tannenbaum-Verzahnung in die Scheibe gesteckt sind. Der Kontakt zwischen Schaufel und Scheibe wird hierbei linear mittels Multiple Point Constraints (MPCs) modelliert.

Als Scheibenwerkstoff wird für beide Modelle die Legierung IN-718 verwendet. Die Schaufeln bestehen aus IN-100. Bei beiden Werkstoffen handelt es sich um Polykristalline.

Die Bewegung der Modelle ist an der Kontaktstelle zwischen Scheibe und Welle durch Single Point Constraints (SPCs) in alle drei Raumrichtungen fixiert. In **Abbildung 4.1** ist dies rot dargestellt. Des Weiteren ist die Bewegung der Scheibe an den blau gekennzeichneten Stellen in tangentialer und axialer Richtung gesperrt. Hier befinden sich in der Realität die Kontaktstellen zu weiteren Turbinenlaufstufen, so dass dies den Randbedingungen im Triebwerk ausreichend genau entspricht. Die Ausdehnung in radialer Richtung aufgrund der Fliehkraft ist weiterhin möglich.

Der Deckbandkontakt wird linear approximiert. Die lineare Modellierung wird durch MPCs in alle drei Raumrichtungen realisiert. Die in der Realität auftretende Reibung im Deckband ist nicht Fokus dieser Arbeit. Dabei gibt es mehrere mögliche Kontaktstellen für die Deckbandkopplung. **Abbildung 4.2** zeigt eine schematische Ansicht einiger möglichen Deckbandkontaktstellen von oben. Zusätzlich wird die Anzahl gekoppelter Knoten nach empirischer Kenntnis der MTU Aero Engines AG für die verschiedenen Schwingungsformen unterschiedlich gewählt.



**Abbildung 4.2:** Schematische Darstellung von Kontaktstellen der Deckbandkopplung

Für die Analysen wird eine konstante Temperatur von 1100 K angenommen.

Die Rotordrehzahl und dem entsprechend die Fliehkraft ergibt sich aus der Resonanzfrequenz der analysierten Moden. Diese wird als statische Last modelliert, wobei die Corioliskraft vernachlässigt wird. Der Einfluss der Corioliskraft auf das dynamische Verhalten wird in [25] diskutiert.



## 4.2 Analyse verstimmter Systeme mittels CalculiX

CALCULIX ist ein Finite Elemente Programm zur dreidimensionalen Strukturberechnung [8][34]. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird es zur Berechnung der linearen Dynamik der Turbinenlaufstufen eingesetzt.

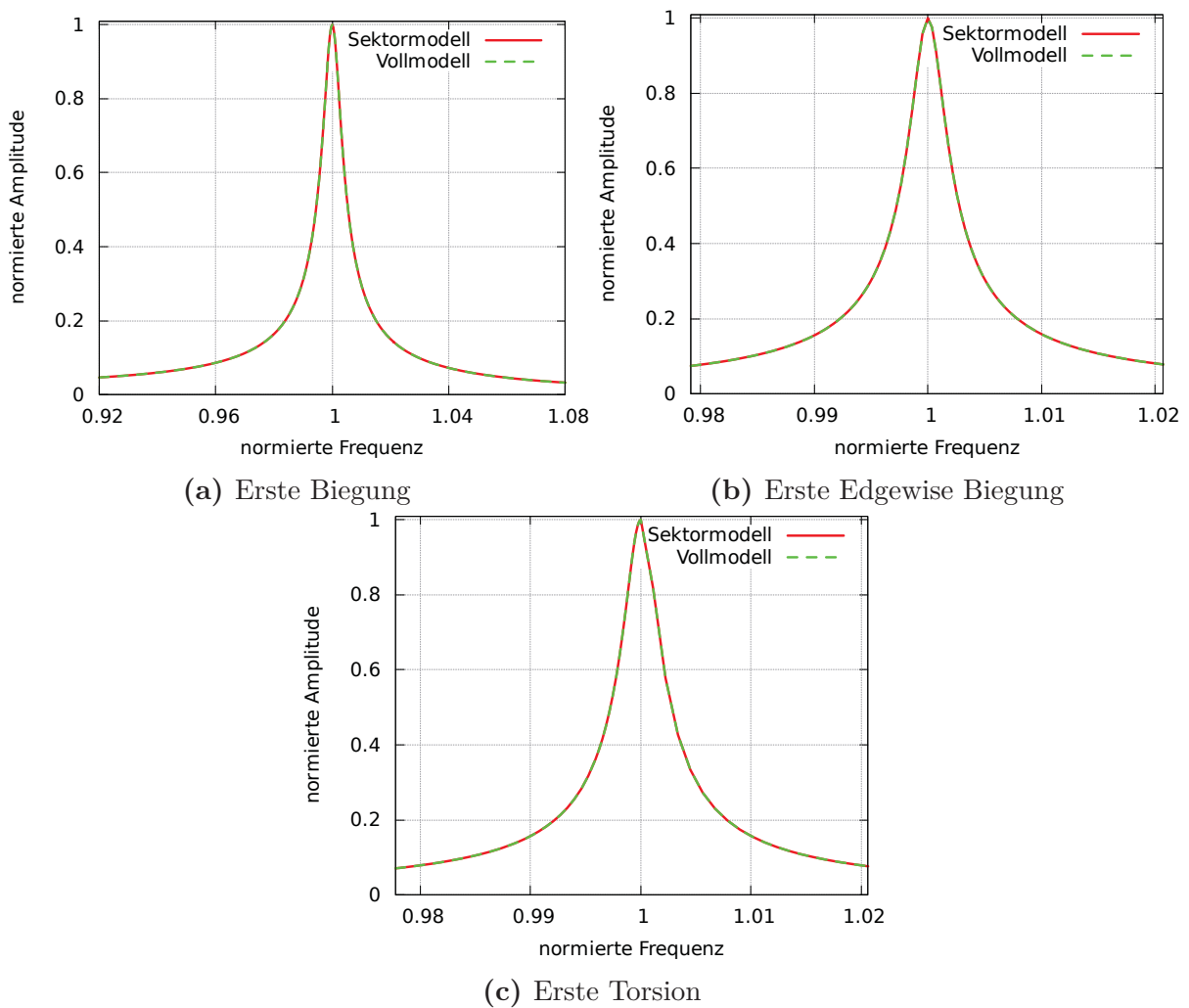
### 4.2.1 Lineare dynamische Berechnungen

Die Berechnung fremderregter Schwingungen mittels CALCULIX gliedert sich in drei Schritte. Als erstes wird ein statischer Schritt gerechnet, darauf folgt ein Frequenz Schritt und abschließend in Abhängigkeit der Anregung ein Steady State Dynamics oder Modal Dynamics Schritt.

- **Statischer Schritt:** Als erstes wird in dem statischen Schritt die Zentrifugalkraft auf die Turbinenlaufstufe aufgebracht. Dies geschieht anhand des Schlagworts `*STATIC`. Die Zentrifugalkraft richtet sich dabei nach der Rotordrehzahl. Sie wirkt auf alle Elemente der Turbinenlaufstufe.
- **Frequenz Schritt:** In dem Frequenz Schritt werden die Eigenfrequenzen und Eigenmoden der Turbinenlaufstufe berechnet. Dazu kann die Anzahl der zu berechnenden Werte festgelegt werden. Der Frequenz Schritt wird anhand des Schlagworts `*FREQUENCY` eingeleitet. Mit dem Parameter `PERTURBATION=YES` lassen sich die Berechnungen unter Berücksichtigung der Zentrifugalkraft aus dem vorhergehenden statischen Schritt durchführen. Die Eigenfrequenzen, Eigenmoden und die Massenmatrix werden durch Angabe des Parameters `STORAGE=YES` zur weiteren Verwendung in einer Datei gespeichert.
- **Steady State Dynamics:** In dem Steady State Dynamics Schritt wird die stationäre Schwingungsantwort der Turbinenlaufstufe bei harmonischer Anregung mit konstanter Amplitude berechnet. Dazu wird angenommen, dass sich die Schwingung aus der Überlagerung der Eigenmoden ergibt. Der Steady State Dynamics Schritt wird anhand des Schlagworts `*STEADY STATE DYNAMICS` eingeleitet. Zur Berechnung der Schwingungsantwort wird auf die zuvor gespeicherten Eigenmoden zurückgegriffen.
- **Modal Dynamics:** In dem Modal Dynamics Schritt wird die transiente Schwingungsantwort der Turbinenlaufstufe berechnet. Dieser wird anhand des Schlagworts `*MODAL DYNAMIC` eingeleitet. Dabei ist dieser Schritt ähnlich zu dem Steady State Dynamics Schritt. Allerdings ändert sich die Frequenz der Anregung linear.

In [10] wird gezeigt, dass die transiente Schwingungsantwort exponentiell stabil ist. Somit ist es nicht nötig die numerische Analyse einer Resonanzdurchfahrt beginnend bei der Drehzahl Null zu rechnen, sondern es ist möglich bei einer Drehzahl erst kurz vor der Resonanz zu beginnen.

### 4.2.2 Erzeugen des Vollmodells



**Abbildung 4.3:** Vergleich der fremderregten Schwingungsantwort des Sektormodells mit zyklisch symmetrischen Randbedingungen und des Vollmodells

Unter der Annahme identischer Sektoren ist es ausreichend, das Schwingungsverhalten einer Turbinenlaufstufe unter Verwendung eines Sektors mit zyklisch symmetrischen Randbedingungen zu modellieren. Dies führt zu einer Reduktion der Freiheitsgrade und somit auch der Rechendauer. Bei der Betrachtung des verstimmt Systems ist diese Annahme allerdings nicht mehr gerechtfertigt und es muss das gesamte Vollmodell der Turbinenlaufstufe modelliert werden. Zum Erzeugen des Vollmodells ausgehend von dem Sektormodell

wird ein bereits vorhandenes Skript [21] verwendet und auf die Anwendung angepasst. Die Materialparameter, Randbedingungen und das Netz werden von dem Sektormodell übernommen und auf das Vollmodell übertragen. Dabei wird für jede Schaufel ein Elementset erstellt, um so später individuelle Materialparameter zuweisen zu können.

Für das Sektormodell mit zyklisch symmetrischen Randbedingungen und das Vollmodell müssen die Ergebnisse in Frequenz und Amplitude übereinstimmen. Deshalb werden für beide Modelle stationäre fremderregte Analysen durchgeführt. **Abbildung 4.3** zeigt die Schwingungsantwort der Schaufeln des realitätsnahen Modells für die ersten drei auftretenden Moden. Mit der durchgezogenen roten Linie ist dabei die Schwingungsantwort des Sektormodells mit zyklisch symmetrischen Randbedingungen dargestellt. Die gestrichelte grüne Linie zeigt die Schwingungsantwort des Vollmodells. Es lässt sich eine exakte Übereinstimmung zwischen dem Sektormodell mit zyklischen Randbedingungen und dem Vollmodell erkennen. Hiermit ist das erzeugte Vollmodell für die folgenden Analysen validiert.

### 4.2.3 Verstimmungsmodellierung

Verstimmung kann durch eine Erweiterung der Bewegungsgleichung (2.14)

$$(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D})\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

beschrieben werden. Hierbei repräsentieren  $\Delta\mathbf{M}$  und  $\Delta\mathbf{K}$  den Einfluss der Strukturverstimmung und  $\Delta\mathbf{D}$  den Einfluss der linearen Dämpfungsverstimmung. Die Änderung der Massenmatrix  $\Delta\mathbf{M}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\Delta\mathbf{K}$  haben linearen Einfluss auf das Schwingungsverhalten. Dadurch ist es möglich, den kombinierten Einfluss lediglich durch eine Änderung der Masse oder der Steifigkeit abzubilden. Aufgrund der besseren Adaptierbarkeit wird in dieser Arbeit eine Anpassung der Steifigkeit der Einzelschaufeln durch eine Änderung des Elastizitätsmoduls gewählt. Der dadurch resultierende Einfluss auf die Eigenfrequenz einer Schaufel ist [15]

$$f_k \sim \sqrt{E_k}. \quad (4.2)$$

Die Dämpfungsverstimmung wird linear anhand der Änderung der modalen Dämpfung modelliert. Durch die Annahme der modalen Dämpfung ist es hierbei möglich direkt das verstimmte Lehr'sche Dämpfungsmaß je Mode anzugeben.

Für die Modellierung der Verstimmung wird der dimensionslose Parameter  $\delta$  verwendet. Zur Erzeugung von  $\delta$  in Abhängigkeit verschiedener Wahrscheinlichkeitsverteilungen mittels Simple Random Samplings wird ein Fortran Skript implementiert. Dabei ist der

grundlegende Ablauf für Strukturverstimmung und Dämpfungsverstimmung identisch. Zu Beginn wird ein Zufallszahlengenerator mit der Systemzeit initialisiert. Diese wird bis auf Nanosekunden genau aufgelöst, um deterministische Wiederholungen zu vermeiden. Anschließend kann zwischen den in **Abschnitt 3.1** beschriebenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen gewählt werden. Bei gleichverteilten Ergebnisgrößen wird direkt auf die Fortran-Funktion *call random\_number* zurückgegriffen. Alle anderen Verteilungen werden aus den gleichverteilten Zufallszahlen durch numerische Integration der Dichtefunktion ermittelt.

Der erzeugte Verstimmungsparameter  $\delta$  stellt einen Abweichungsfaktor vom Nominalwert dar. Das verstimmte Elastizitätsmodul bzw. Lehr'sche Dämpfungsmaß ergeben sich somit zu

$$\begin{aligned} E_{k,mis} &= \delta_k^E \cdot E_{nom}, & \text{für } k = 1, \dots, N \\ \zeta_{k,mis} &= \delta_k^\zeta \cdot \zeta_{nom}, & \text{für } k = 1, \dots, N_m. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Hierbei entspricht  $E_{k,mis}$  dem verstimmten Elastizitätsmodul der  $k$ -ten Schaufel,  $E_{nom}$  dem nominalen Elastizitätsmodul und  $\delta_k^E$  dem dimensionslosen Verstimmungsparameter für das Elastizitätsmodul der  $k$ -ten Schaufel. Analog gilt das für das verstimmte Lehr'sche Dämpfungsmaß  $\zeta_{k,mis}$ , wobei hier  $k$  den jeweiligen Mode beschreibt und  $N_m$  die Anzahl verstimmter Moden.

## 4.3 Analyse verstimmter Systeme mittels ROCMAN

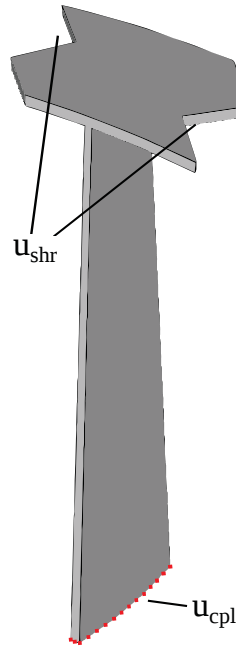
Da eine Finite Elemente Rechnung des verstimmten Vollmodells der Turbinenlaufstufe aufgrund der hohen Freiheitsgradanzahl sehr viel Rechenkapazität benötigt, wird nachfolgend das Tool ROCMAN des Instituts für Nichtlineare Mechanik und des Instituts für Luftfahrtantriebe der Universität Stuttgart betrachtet. Dieses reduziert die Freiheitsgradanzahl des Modells und ermöglicht anschließend die effiziente Analyse der Eigenschwingungen und fremderregter Schwingungen. Um spätere Ergebnisse bewerten zu können, werden die implementierten Verfahren zur Modellreduktion ausführlich erläutert [27].

### 4.3.1 Modellreduktion in ROCMAN

Zur Reduktion der Freiheitsgrade wird das Verfahren der Component Mode Synthesis (CMS) verwendet. Diese teilt das komplexe Gesamtsystem in mehrere Untersysteme auf. Bei einer Turbinenlaufstufe sind das die Untersysteme Scheibe und Schaufel. Zusätzlich werden die Freiheitsgrade nach inneren und äußeren Freiheitsgraden sortiert. Die äußeren Freiheitsgrade werden auch als Kopplungsfreiheitsgrade bezeichnet, da diese die Untersysteme miteinander verbinden. Unter Verwendung der CRAIG-BAMPTON Methode

[6] werden die inneren Freiheitsgrade in modale Koordinaten transformiert, wobei die äußeren Freiheitsgrade in physikalischen Koordinaten verbleiben. Dadurch wird das spätere Zusammensetzen der Untersysteme zum Gesamtsystem ermöglicht. Zuerst wird das System als unverstimmt betrachtet und anschließend die Verstimmung der Schaufeln auf die Harmonischen des Vollmodells projiziert.

### 4.3.2 Schaufelreduktion



**Abbildung 4.4:** Darstellung der Schaufel mit äußeren Freiheitsgraden

Die Freiheitsgrade der Schaufel (Index  $b$  für blade) werden unter Verwendung der CRAIG-BAMPTON Methode reduziert. Dabei werden die inneren Freiheitsgrade  $\mathbf{u}_f^b$  durch eine Kombination von sogenannten fixed interface modes  $\Phi$  und constraint modes  $\Psi$  ersetzt, während die äußeren Freiheitsgrade  $\mathbf{u}_i^b$  in den physikalischen Koordinaten verbleiben. Zu den äußeren Freiheitsgraden werden die Koppelknoten  $\mathbf{u}_{cpl}^b$  und die Kontaktknoten des Deckbands  $\mathbf{u}_{shr}^b$  zusammengefasst. Unterteilt man analog die Massen- und Steifigkeitsmatrix in innere und äußere Freiheitsgrade lautet die ungedämpfte Bewegungsgleichung der Schaufel

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff}^b & \mathbf{M}_{fi}^b \\ \mathbf{M}_{if}^b & \mathbf{M}_{ii}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_f^b \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff}^b & \mathbf{K}_{fi}^b \\ \mathbf{K}_{if}^b & \mathbf{K}_{ii}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_f^b \\ \mathbf{u}_i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_i^b \end{bmatrix}, \quad \text{mit } \mathbf{u}_i^b = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{cpl}^b \\ \mathbf{u}_{shr}^b \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Die Eigenwerte und Eigenmoden der fixed interface modes  $\Phi$  ergeben sich, entsprechend der Bezeichnung, unter der Fixierung der äußeren Freiheitsgrade. Das Eigenwertproblem

vereinfacht sich zu

$$(\mathbf{K}_{ff}^b - \omega_j^2 \mathbf{M}_{ff}^b) \phi_j^b = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

woraus die fixed interface modes  $\Phi^b = [\phi_1^b, \dots, \phi_m^b]$  folgen. Sie repräsentieren das dynamische Verhalten des Systems. Die Anzahl der für die Reduktion verwendeten Moden  $m$  bestimmt dabei die Genauigkeit des reduzierten Systems. Werden alle Moden beibehalten, entspricht dies lediglich einer Transformation in den modalen Raum, jedoch keiner Reduktion.

Die constraint modes  $\Psi$  ergeben sich aus den Reaktionen des Systems durch nacheinander aufgebrachte Einheitsverschiebungen auf einzelne Kopplungsfreiheitsgrade. Sie repräsentieren eine statische Korrektur für das dynamische Verhalten. Die Verknüpfung der inneren mit den äußeren Freiheitsgraden wird mit der statischen GUYAN-Kondensation [9]

$$\Psi = -\mathbf{K}_{ff}^{b^{-1}} \mathbf{K}_{fi}^b \quad (4.6)$$

modelliert.

Aus der Kombination resultiert die Reduktionsbasis  $\Theta$ . Diese reduziert die inneren Freiheitsgrade auf die modalen Freiheitsgrade  $\mathbf{p}_m^b$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_f^b \\ \mathbf{u}_i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{fm}^b & \Psi_{fi}^b \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_m^b \\ \mathbf{u}_i^b \end{bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} \mathbf{p}_m^b \\ \mathbf{u}_i^b \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Hierbei beschreibt  $\mathbf{p}_m^b$  die modalen Freiheitsgrade entsprechend der fixed-interface Bewegung, wohingegen  $\mathbf{u}_i^b$  in physikalischen Koordinaten aus der ursprünglichen Bewegungsgleichung (4.4) erhalten bleibt.

Die reduzierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen ergeben sich mit Hilfe der CRAIG-BAMPTON Basis  $\Theta$  zu

$$\mathbf{M}_{red}^b = \Theta^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm}^b & \mathbf{M}_{mi}^b \\ \mathbf{M}_{im}^b & \mathbf{M}_{ii}^b \end{bmatrix} \Theta = \Theta^T \mathbf{M}^b \Theta \quad (4.8)$$

$$\mathbf{K}_{red}^b = \Theta^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm}^b & \mathbf{K}_{mi}^b \\ \mathbf{K}_{im}^b & \mathbf{K}_{ii}^b \end{bmatrix} \Theta = \Theta^T \mathbf{K}^b \Theta. \quad (4.9)$$

Um die einzelnen Schaufeln zum Vollmodell zu expandieren, werden die Matrizen mit der Rotationsmatrix  $\mathbf{T}$  in globale Koordinaten transformiert und daraus eine blockdiagonale Massenmatrix

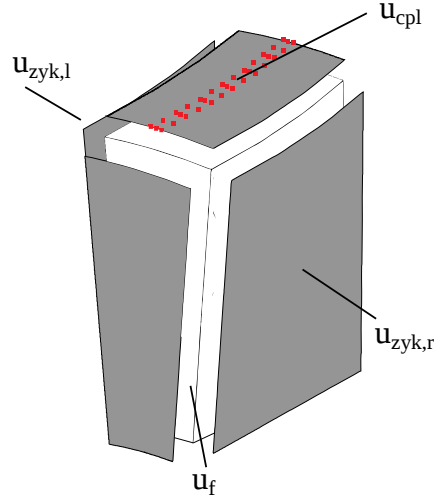
$$\bar{\mathbf{M}}_{red}^b = blkdiag(\mathbf{T}_1^T \mathbf{M}_{red}^b \mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_N^T \mathbf{M}_{red}^b \mathbf{T}_N) \quad (4.10)$$

und Steifigkeitsmatrix

$$\bar{\mathbf{K}}_{red}^b = blkdiag(\mathbf{T}_1^T \mathbf{K}_{red}^b \mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_N^T \mathbf{K}_{red}^b \mathbf{T}_N) \quad (4.11)$$

gebildet. Der Überstrich stellt die physikalischen Koordinaten der Koppelknoten dar.

### 4.3.3 Scheibenreduktion



**Abbildung 4.5:** Darstellung der Scheibe mit äußeren Freiheitsgraden

#### Zyklische Reduktion

Zur Reduktion der Scheibe (Index  $d$  für disk) wird zuerst die zyklische Symmetrie ausgenutzt. Dabei werden die Freiheitsgrade nach den zyklischen Knoten des linken Rands  $\mathbf{u}_{zyk,l}^d$  und des rechten Rands  $\mathbf{u}_{zyk,r}^d$  sortiert. Es ergeben sich die betrachteten Freiheitsgrade zu

$$\mathbf{u}_{zyk}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{zyk,l}^d & \mathbf{u}_{zyk,r}^d \end{bmatrix}^T. \quad (4.12)$$

Dabei führt der rechte Rand  $\mathbf{u}_{zyk,r}^d$  die gleiche Schwingung wie der linke Rand  $\mathbf{u}_{zyk,l}^d$  nur phasenverschoben aus (vgl. **Abschnitt 2.2.3**). Der Phasenwinkel ist abhängig von dem Winkel  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$  zwischen zwei Sektoren und dem harmonischen Index  $h$ . Dies führt zu der Formulierung der zyklisch symmetrischen Randbedingung mit der Transformationsvorschrift

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{zyk,l}^d \\ \mathbf{u}_{zyk,r}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{T}e^{j\alpha h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{zyk,l}^d \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

und somit der reduzierten Zahl an Freiheitsgraden  $\mathbf{u}_{zyk}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{zyk,l}^d \end{bmatrix}$ . Hierbei bildet die Rotationsmatrix  $\mathbf{T}$  die Rotation vom rechten zum linken Rand ab. Um das vollständige dynamische Verhalten der Scheibe, d. h. alle möglichen Knotendurchmesser und Drehrichtungen beschreiben zu können, müssen alle harmonischen Indizes  $h = 0, \dots, N-1$  betrachtet werden. Diese sind per Definition [14] voneinander entkoppelt, so dass die CRAIG-BAMPTON Reduktion für jede Harmonische einzeln durchgeführt werden kann.

Das dynamische Verhalten wird dazu in blockdiagonaler Form

$$\tilde{\mathbf{M}}^d = \text{blkdiag}(\tilde{\mathbf{M}}_0^d, \dots, \tilde{\mathbf{M}}_{N-1}^d) \quad (4.14)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}^d = \text{blkdiag}(\tilde{\mathbf{K}}_0^d, \dots, \tilde{\mathbf{K}}_{N-1}^d) \quad (4.15)$$

dargestellt, wobei jede Untermatrix einem harmonischen Index entspricht. Die Tilde stellt zyklische Koordinaten der Koppelknoten dar.

### Reduktion nach Craig-Bampton

Es ergibt sich die Bewegungsgleichung der Scheibe entsprechend des harmonischen Index<sup>8</sup>

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{ff}^d & \tilde{\mathbf{M}}_{fi}^d \\ \tilde{\mathbf{M}}_{if}^d & \tilde{\mathbf{M}}_{ii}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_f^d \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{ff}^d & \tilde{\mathbf{K}}_{fi}^d \\ \tilde{\mathbf{K}}_{if}^d & \tilde{\mathbf{K}}_{ii}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_f^d \\ \mathbf{u}_i^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_i^d \end{bmatrix}, \quad \text{mit } \mathbf{u}_i^d = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{cpl}^d \\ \mathbf{u}_{zyk}^d \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Analog zu **Abschnitt 4.3.2** werden die Freiheitsgrade unter Verwendung der CRAIG-BAMPTON Methode reduziert. Daraus folgen die reduzierten Matrizen in globalen Koordinaten mit der CRAIG-BAMPTON Basis  $\Theta_h$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{red}^d = \text{blkdiag}(\Theta_0^T \tilde{\mathbf{M}}^d \Theta_0, \dots, \Theta_{N-1}^T \tilde{\mathbf{M}}^d \Theta_{N-1}) \quad (4.17)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{red}^d = \text{blkdiag}(\Theta_0^T \tilde{\mathbf{K}}^d \Theta_0, \dots, \Theta_{N-1}^T \tilde{\mathbf{K}}^d \Theta_{N-1}). \quad (4.18)$$

### 4.3.4 Zusammensetzen des Vollmodells

Nach der Reduktion der Untersysteme und deren Expansion zum vollen System, bestehend aus  $N$  Sektoren, wird die Kopplung zwischen den Untersystemen hergestellt. Es wird ein identisches Verhalten der Koppelknoten gefordert, so dass

$$\bar{\mathbf{u}}_{cpl,i}^b = \bar{\mathbf{u}}_{cpl,i}^d \quad (4.19)$$

gelten muss. Des Weiteren wird ein identisches Netz angenommen.

Da die Koppelknoten der Schaufel noch in physikalischen Koordinaten vorliegen, werden diese analog den Koppelknoten der Scheibe in zyklische Koordinaten transformiert. Dazu wird die Fouriermatrix  $\bar{\mathcal{F}}$  verwendet

$$\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathbf{I}, \quad \text{mit } \mathcal{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{j2\pi(k-1)(l-1)}{N}}; \quad k, l = 1, \dots, N. \quad (4.20)$$

Die Knoten des Deckbands  $\bar{\mathbf{u}}_{shr}^b$  bleiben weiterhin in physikalischen Koordinaten erhalten.

<sup>8</sup>Die Angabe des harmonischen Index wird zur Übersichtlichkeit weggelassen.



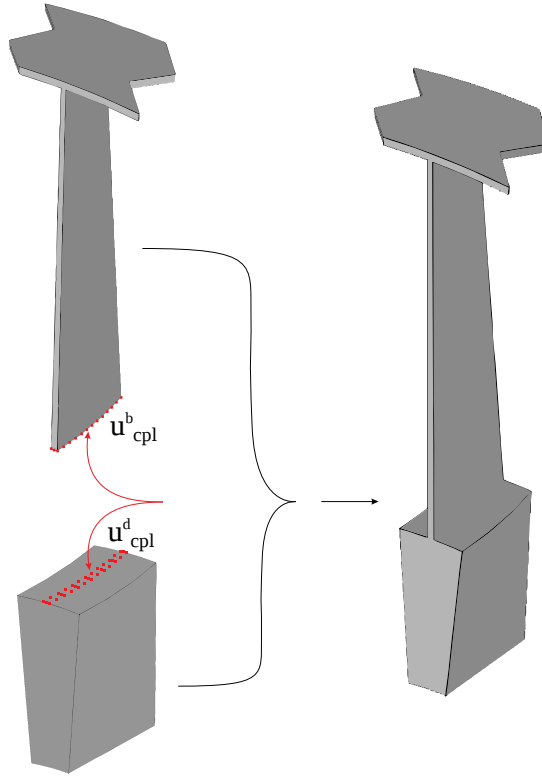


Abbildung 4.6: Zusammensetzen der Untersysteme

Dadurch ergibt sich die Transformation und Kopplung der Untersysteme zu

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_m^d \\ \tilde{\mathbf{u}}_i^d \\ \bar{\mathbf{p}}_m^b \\ \bar{\mathbf{u}}_i^b \\ \bar{\mathbf{u}}_{shr}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathcal{F}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_m^d \\ \tilde{\mathbf{u}}_i^d \\ \bar{\mathbf{p}}_m^b \\ \bar{\mathbf{u}}_{shr}^b \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{cms} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_m^d \\ \tilde{\mathbf{u}}_i^d \\ \bar{\mathbf{p}}_m^b \\ \bar{\mathbf{u}}_{shr}^b \end{bmatrix}, \quad \text{mit } \tilde{\mathbf{u}}_i^d = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{cpl}^d \\ \tilde{\mathbf{u}}_{zyk}^d \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Die Massen- und die Steifigkeitsmatrix des Vollmodells ergeben sich zu

$$\mathbf{M}_{cms} = \mathbf{T}_{cms}^H \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{red}^d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{red}^b \end{bmatrix} \mathbf{T}_{cms} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{red,mm}^d & \tilde{\mathbf{M}}_{red,mi}^d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{red,im}^d & \tilde{\mathbf{M}}_{red,ii}^d + \bar{\mathcal{F}}^H \bar{\mathbf{M}}_{red,ii}^b \bar{\mathcal{F}} & \bar{\mathcal{F}}^H \bar{\mathbf{M}}_{red,im}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{red,mi}^b \bar{\mathcal{F}} & \bar{\mathbf{M}}_{red,mm}^b & \bar{\mathbf{M}}_{red,mshr}^b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_{red,shrm}^b & \bar{\mathbf{M}}_{red,shrshr}^b \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{K}_{cms} = \mathbf{T}_{cms}^H \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{red}^d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}}_{red}^b \end{bmatrix} \mathbf{T}_{cms} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{red,mm}^d & \tilde{\mathbf{K}}_{red,mi}^d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{red,im}^d & \tilde{\mathbf{K}}_{red,ii}^d + \bar{\mathcal{F}}^H \bar{\mathbf{K}}_{red,ii}^b \bar{\mathcal{F}} & \bar{\mathcal{F}}^H \bar{\mathbf{K}}_{red,im}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}}_{red,mi}^b \bar{\mathcal{F}} & \bar{\mathbf{K}}_{red,mm}^b & \bar{\mathbf{K}}_{red,mshr}^b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}}_{red,shrm}^b & \bar{\mathbf{K}}_{red,shrshr}^b \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

### 4.3.5 Reduktion der Kopplungsfreiheitsgrade

Die Ordnung des Systems ist immer noch durch eine hohe Anzahl an Kopplungsfreiheitsgraden bestimmt. Deshalb werden auch diese modal reduziert. Die Reduktionsbasis ergibt sich durch Lösen des Eigenwertproblems

$$(\tilde{\mathbf{K}}_{red,ii} - \omega_{ii}^2 \tilde{\mathbf{M}}_{red,ii}) \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ii} = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

mit  $\tilde{\mathbf{M}}_{red,ii}$  und  $\tilde{\mathbf{K}}_{red,ii}$ , die in Gleichung (4.22) und (4.23) die Kopplung zwischen Schaufel und Scheibe abbilden. Durch Betrachtung lediglich der gewünschten Anzahl  $m$  der ersten Eigenmoden  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{ii}$  ergibt sich analog zu Gleichung (4.7) die Koordinatentransformation

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_m^d \\ \tilde{\mathbf{u}}_i \\ \tilde{\mathbf{p}}_m^b \\ \tilde{\mathbf{u}}_{shr}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{m,ii} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_m^d \\ \tilde{\mathbf{p}}_i \\ \tilde{\mathbf{p}}_m^b \\ \tilde{\mathbf{u}}_{shr}^b \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Theta}_i \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_m^d \\ \tilde{\mathbf{p}}_i \\ \tilde{\mathbf{p}}_m^b \\ \tilde{\mathbf{u}}_{shr}^b \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

und die Matrizen des Vollmodells

$$\mathbf{M}_{cms,red} = \boldsymbol{\Theta}_i^T \mathbf{M}_{cms} \boldsymbol{\Theta}_i \quad (4.26)$$

$$\mathbf{K}_{cms,red} = \boldsymbol{\Theta}_i^T \mathbf{K}_{cms} \boldsymbol{\Theta}_i. \quad (4.27)$$

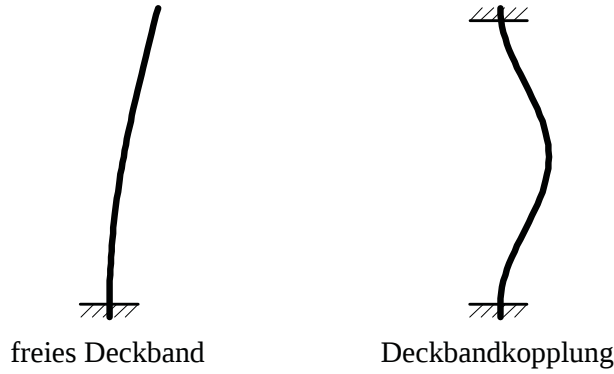
### 4.3.6 Verstimmungsapplikation

Zur Beschreibung der Verstimmung wird analog zu **Abschnitt 4.2.3** der dimensionslose Verstimmungsparameter  $\delta$  verwendet. Die Strukturverstimmung wird identisch durch Variation des Elastizitätsmoduls und die Dämpfungsverstimmung durch Variation der modalen Dämpfung modelliert. Hierdurch wird die Vergleichbarkeit der beiden Tools gewährleistet. Der Verstimmungsparameter  $\delta$  ist im Falle von Strukturverstimmung definiert als

$$\delta_k^E = \left( \frac{\omega_{mis,k}}{\omega_{nom}} \right)^2 - 1 \quad (4.28)$$

Hierbei entspricht  $\omega_{mis,k}$  der verstimmtten Eigenkreisfrequenz der  $k$ -ten Schaufel und  $\omega_{nom}$  der nominalen Eigenkreisfrequenz. Die Eigenkreisfrequenz wird dabei für die freie Einzelschaufel bestimmt. Somit beschreibt der Verstimmungsparameter  $\delta^E$  den Einfluss der Verstimmung auf die Schwingungsform bei freiem Deckband. Um allerdings die Kopplung am Deckband zu ermöglichen, müssen die Kontaktknoten des Deckbands  $\mathbf{u}_{shr}^b$  fixiert werden. Dadurch ergibt sich eine grundlegend abweichende Schwingungsform.

Dies ist in **Abbildung 4.7** schematisch für die erste Biegeschwingung eines Balkens



**Abbildung 4.7:** Schematische Darstellung der ersten Biegeschwingung eines Balkens bei verschiedenen Einspannungen

dargestellt. Um den identischen Einfluss der Verstimmung auf die Schwingungsform mit Deckbandkopplung zu erfassen, wird eine Verstimmungs-Projektion angewandt [3]. Die verstimmte Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{mis,k}^b$  der  $k$ -ten Schaufel ergibt sich dadurch zu

$$\mathbf{K}_{mis,k}^b = \mathbf{K}_{red}^b + \Delta\mathbf{K}_{mis,k}^b, \quad (4.29)$$

mit der nominalen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{red}^b$  und der Verstimmungsmatrix  $\Delta\mathbf{K}_{mis,k}^b$ . Die Verstimmungsmatrix ist definiert als

$$\Delta\mathbf{K}_{mis,k}^b = \Theta_{shr}^{b\ T} \mathbf{M}^b \Phi_{cnt}^b \delta_k^E \Phi_{cnt}^{b\ T} \mathbf{K}_{red}^b \Theta_{shr}^b, \quad (4.30)$$

mit

$$\Theta_{shr}^b = \begin{bmatrix} \Phi^b & \Psi_{shr}^b \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Hierbei entspricht  $\Psi_{shr}^b$  den constraint modes zu den Deckbandfreiheitsgraden und  $\Phi^b$  den fixed-interface modes der Einzelschaukel aus Gleichung (4.5). Im Gegensatz dazu werden die normal fixed-interface modes  $\Phi_{cnt}^b$  ohne eine Fixierung der Deckbandfreiheitsgrade bestimmt. Diese transformieren die Verstimmungsmatrix in physikalische Koordinaten. Durch  $\Theta_{shr}^b$  erfolgt die Projektion auf die Harmonischen des Vollmodells.

#### 4.3.7 Kopplung der Deckbandfreiheitsgrade

Die Kopplung der Deckbandfreiheitsgrade wird mittels einer festen Kopplung realisiert. Dazu wird die Bewegungsgleichung des reduzierten Systems betrachtet

$$\mathbf{M}_{cms,red} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{cms,red} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{g}. \quad (4.32)$$

Hierbei entspricht  $\mathbf{f}$  dem Vektor der externen Kräfte und  $\mathbf{g}$  dem Vektor der Kontaktkräfte zwischen den Deckbändern. Die Knoten des Deckbands liegen in physikalischen Koordinaten vor (vgl. Gleichung (4.21)). Dadurch ist eine direkte Kopplung der Knoten möglich. Es wird die Verträglichkeitsbedingung

$$\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}_{shr,k}^b = \mathbf{0} \quad (4.33)$$

mit der vorzeichenbehafteten Zuordnungsmatrix  $\mathbf{B}$  aufgestellt. Diese enthält die Werte 0, -1, 1. Für eine feste Kopplung zweier Knoten  $u_1$  und  $u_2$  ergibt sich

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,x} \\ u_{1,y} \\ u_{1,z} \\ u_{2,x} \\ u_{2,y} \\ u_{2,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,x} - u_{2,x} \\ u_{1,y} - u_{2,y} \\ u_{1,z} - u_{2,z} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.34)$$

Aus dem Kräftegleichgewicht folgt die Forderung

$$\mathbf{L}^T \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (4.35)$$

mit  $\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{q}$ . Da Gleichung (4.33) für alle  $\mathbf{q}$  gelten muss, muss  $\mathbf{L}$  dem Nullraum von  $\mathbf{B}$  entsprechen

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{L}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \text{null}(\mathbf{B}). \quad (4.36)$$

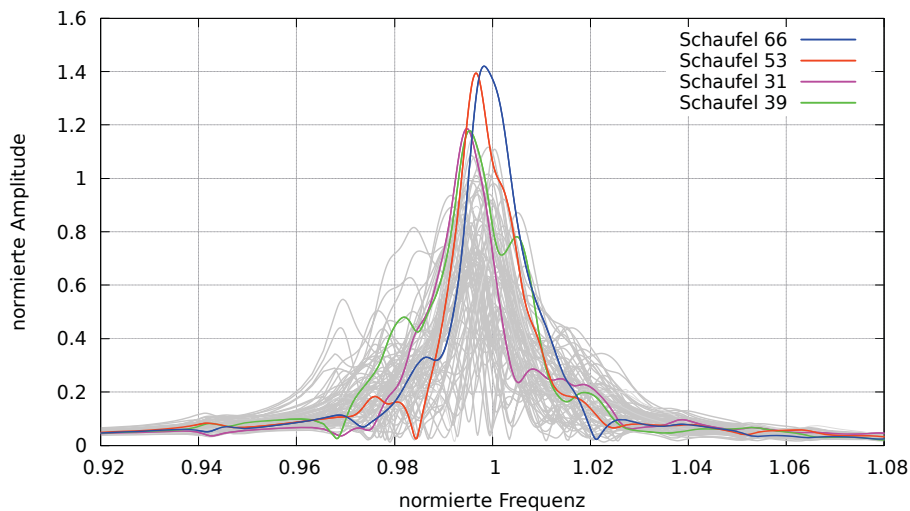
Für das Beispiel aus Gleichung (4.34) ergibt sich  $\mathbf{L}$  somit zu

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

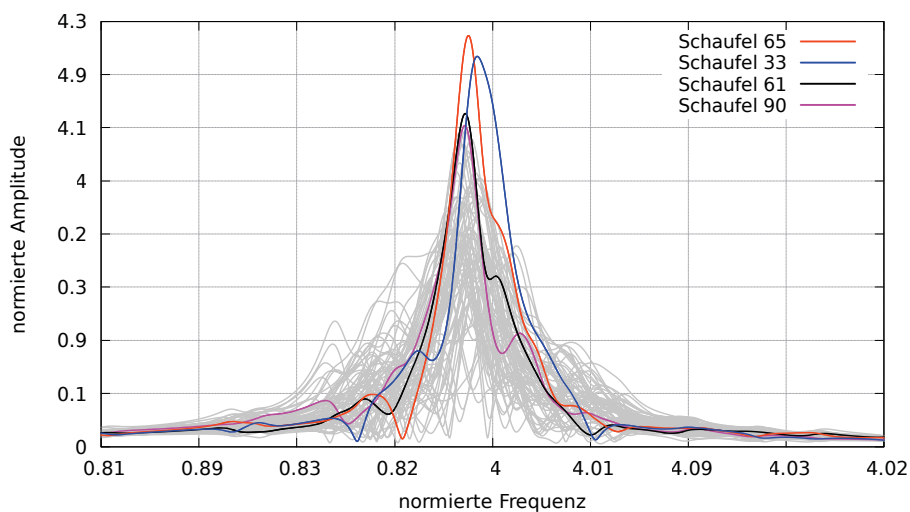
Daraus lässt sich die Bewegungsgleichung des gekoppelten Systems aufstellen

$$\mathbf{M}_{cms,red}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{cms,red}\mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (4.38)$$

## 4.4 Vergleich zwischen CalculiX und ROCMAN



(a) farbliche Darstellung der vier Schaufeln mit der maximalen Amplitude mit CALCULIX

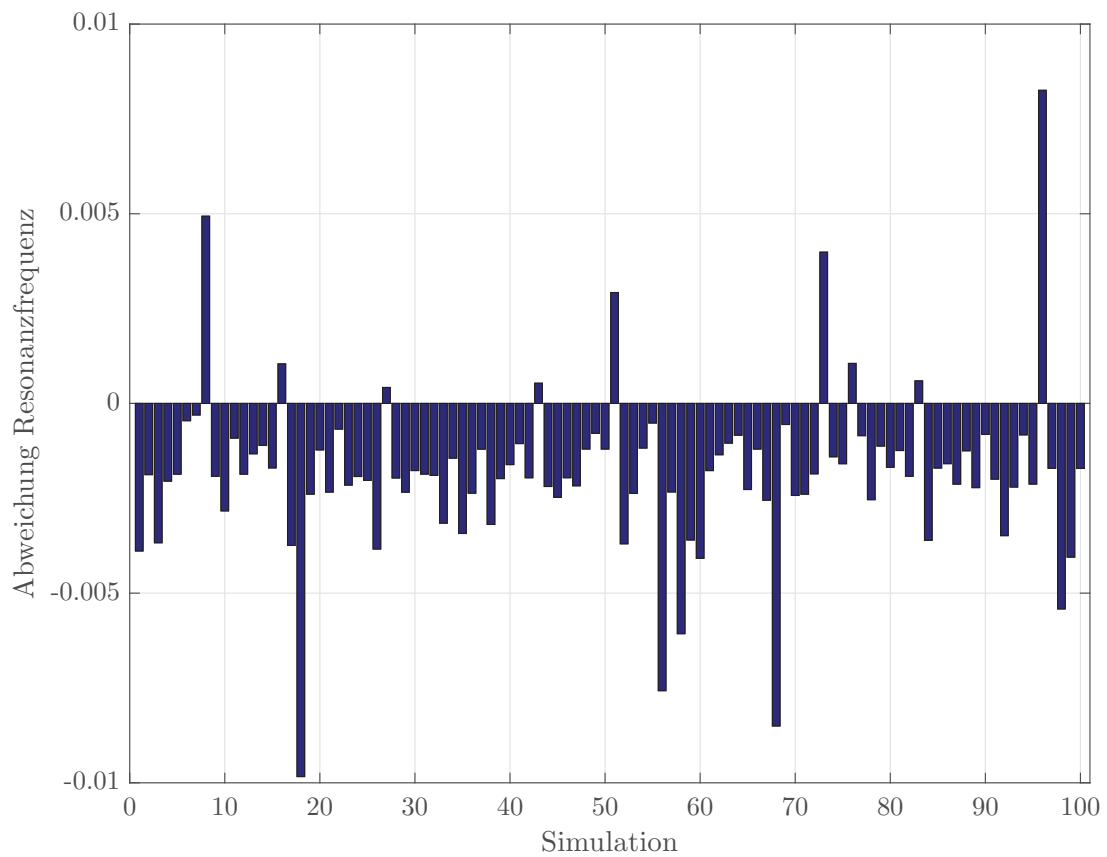


(b) farbliche Darstellung der vier Schaufeln mit der maximalen Amplitude mit ROCMAN

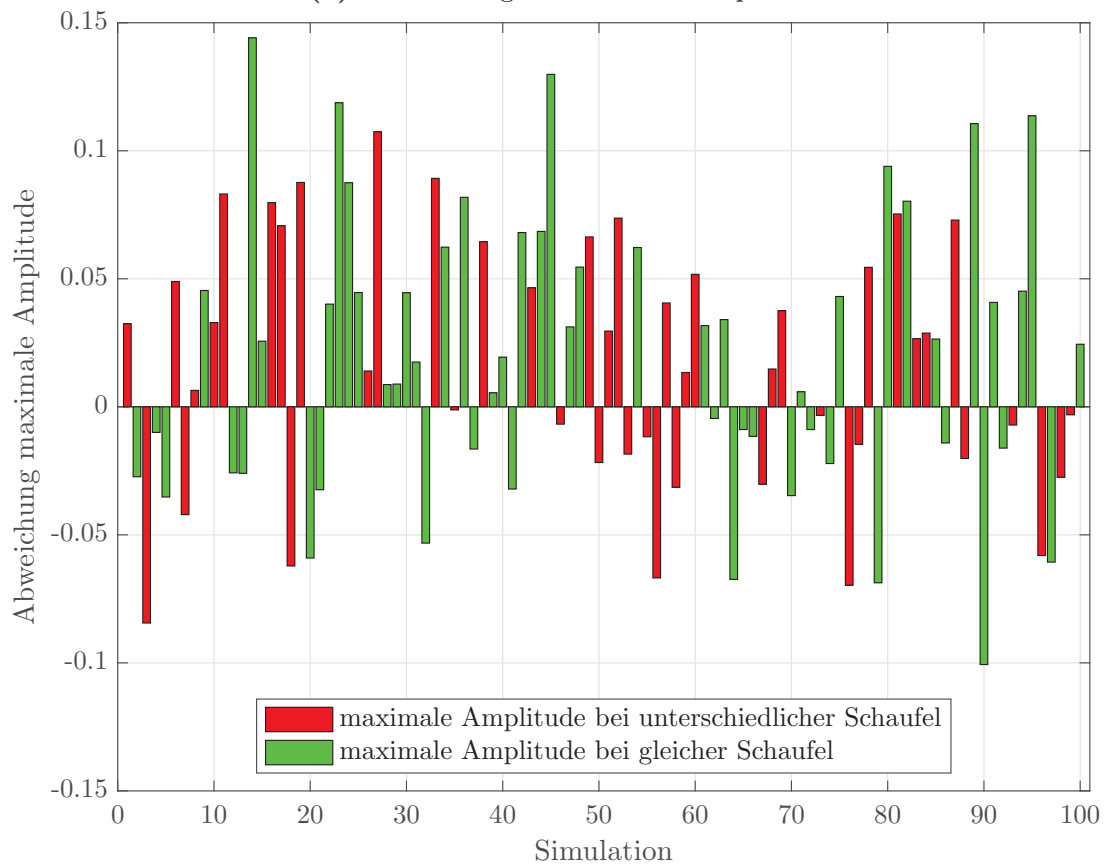
**Abbildung 4.8:** Exemplarische fremderregte Schwingungsantwort einer strukturverstimten Turbinenlaufstufe mit dem Tool CALCULIX und dem Tool ROCMAN

Durch die Modellreduktion lässt sich die Rechenzeit verringern. Besonders bei dem realitätsnahen Modell ergibt sich ein deutlicher Vorteil. Deshalb wird nachfolgend analysiert, inwiefern sich dies auf die Ergebnisse auswirkt.

Dazu werden stationäre fremderregte Analysen durchgeführt. Die Anregung erfolgt umlaufend am Knoten mit der maximalen axialen Auslenkung der unverstimten Turbinenlaufstufe. In **Abbildung 4.8** ist für eine exemplarische Materialverstimmung und konstante Dämpfung die Schwingungsantwort des realitätsnahen Modells mit CALCULIX



(a) Abweichung der Resonanzfrequenz



(b) Abweichung der maximalen Amplitude

**Abbildung 4.9:** Probabilistischer Vergleich zwischen CALCULIX und ROCMAN

und ROCMAN dargestellt. Um die Ergebnisse vergleichen zu können, sind jeweils die vier Schaufeln mit der maximalen Amplitude farblich dargestellt. Bei beiden Tools ergeben sich die zwei maximalen Amplituden für die Schaufeln 53 und 66. Auf den ersten Blick zeigt sich zudem ein ähnlicher Verlauf der Amplitude für diese Schaufeln. Allerdings wird mit CALCULIX die maximale Amplitude aller Schaufeln für Schaufel 66 berechnet, wohingegen sich mit ROCMAN die maximale Amplitude aller Schaufeln für Schaufel 53 ergibt. Darüber hinaus sind die weiteren Schaufeln mit der maximalen Amplitude für die beiden Tools unterschiedlich.

Zum probabilistischen Vergleich der Ergebnisse werden exemplarisch für das realitätsnahe Modell 100 Simulationen mit normalverteiltem Elastizitätsmodul und konstanter Dämpfung gerechnet. Ausgewertet wird die Resonanzfrequenz und die maximale Amplitude der ersten Biegung pro Simulation. Anschließend werden die Ergebnisse von ROCMAN ins Verhältnis zu den Ergebnissen von CALCULIX gesetzt.

In **Abbildung 4.9** sind die Abweichung der Resonanzfrequenz, bei der sich die maximale Amplitude ergibt, sowie die Abweichung der maximalen Amplitude dargestellt. Des Weiteren sind in **Abbildung 4.9b** in grüner Farbe die Simulationen markiert, bei denen die maximale Amplitude bei der gleichen Schaufel auftritt, und in roter Farbe die Simulationen dargestellt, bei denen sich die maximale Amplitude bei unterschiedlichen Schaufeln für die beiden Tools ergibt.

Es zeigt sich, dass die Resonanzfrequenz durch ROCMAN im Mittel geringfügig niedriger errechnet wird als durch CALCULIX. Die maximale Streuung liegt allerdings im Bereich von  $\pm 1\%$ . Somit stimmen die beiden Tools bei der Berechnung der Resonanzfrequenzen gut überein.

Die maximale Amplitude wird durch ROCMAN tendenziell höher als durch CALCULIX errechnet. Hierbei ergibt sich eine maximale Abweichung der Ergebnisse beider Tools im Bereich von  $\pm 15\%$ . Zudem wird durch die beiden Tools in 44/100 Simulationen die maximale Amplitude für unterschiedliche Schaufeln berechnet.

Die starken Abweichungen lassen sich auf die im vorherigen Abschnitt ausführlich dargestellte unterschiedliche Verstimmungsapplikation zurückführen. In CALCULIX werden die verstimmten Moden direkt für das Vollmodell berechnet, wohingegen ROCMAN die verstimmten Moden der Einzelschaukel berechnet und anschließend auf das Vollmodell projiziert. Diese Projektion stellt dabei lediglich eine Annäherung dar.

Aufgrund der Abweichungen besonders in der maximalen Amplitude werden die nachfolgenden Analysen mittels CALCULIX durchgeführt.

## 5 Stationäre Analysen verstimmter Turbinenlaufstufen

### 5.1 Vorgehensweise

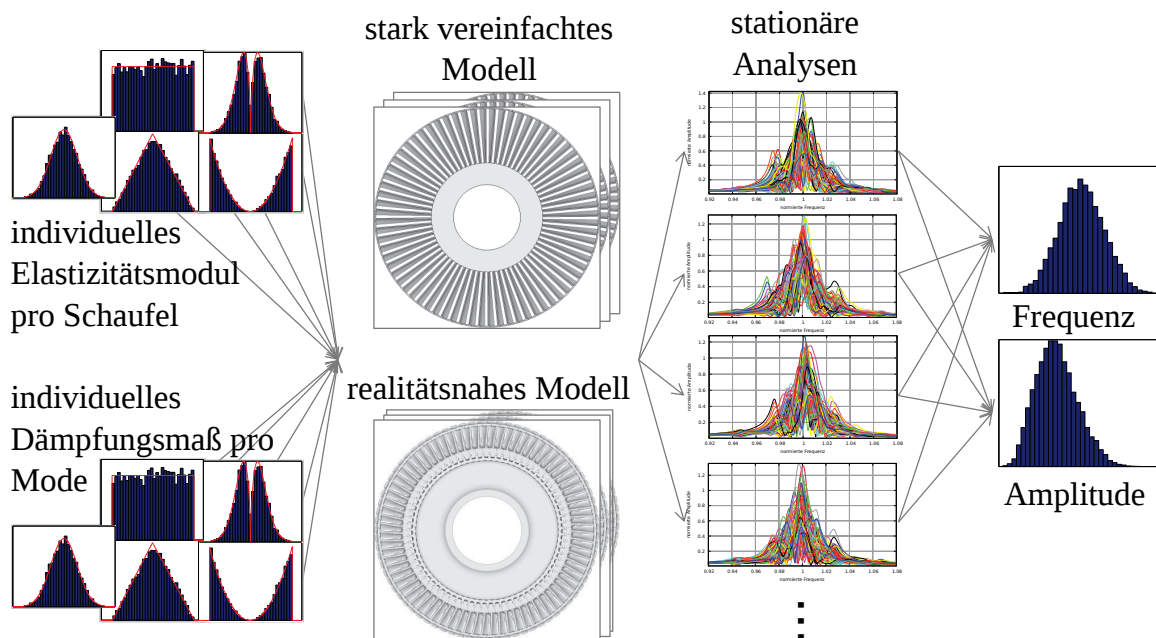


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung der Monte Carlo Vorgehensweise

Für die stationären Analysen werden Monte Carlo Simulationen durchgeführt. Der Ablauf ist in **Abbildung 5.1** schematisch dargestellt. Dieser gliedert sich in vier Schritte. Zuerst werden die zufälligen Eingangsgrößen für das Elastizitätsmodul pro Schaufel und für die modale Dämpfung pro Mode entsprechend der Verteilungen generiert. Mit diesen werden die  $n$  Inputdatensätze gemäß der Anzahl an Simulationen zusammengestellt. Anschließend werden die Simulationen unabhängig voneinander berechnet. Den letzten Schritt stellt die statistische Analyse der berechneten Ausgangsgrößen Frequenz und Amplitude dar. Die Amplitude kann in dieser Arbeit sowohl als Verschiebung als auch als Spannung verstanden werden, da im linearen Fall ein direkter Zusammenhang zwischen beiden Größen besteht.

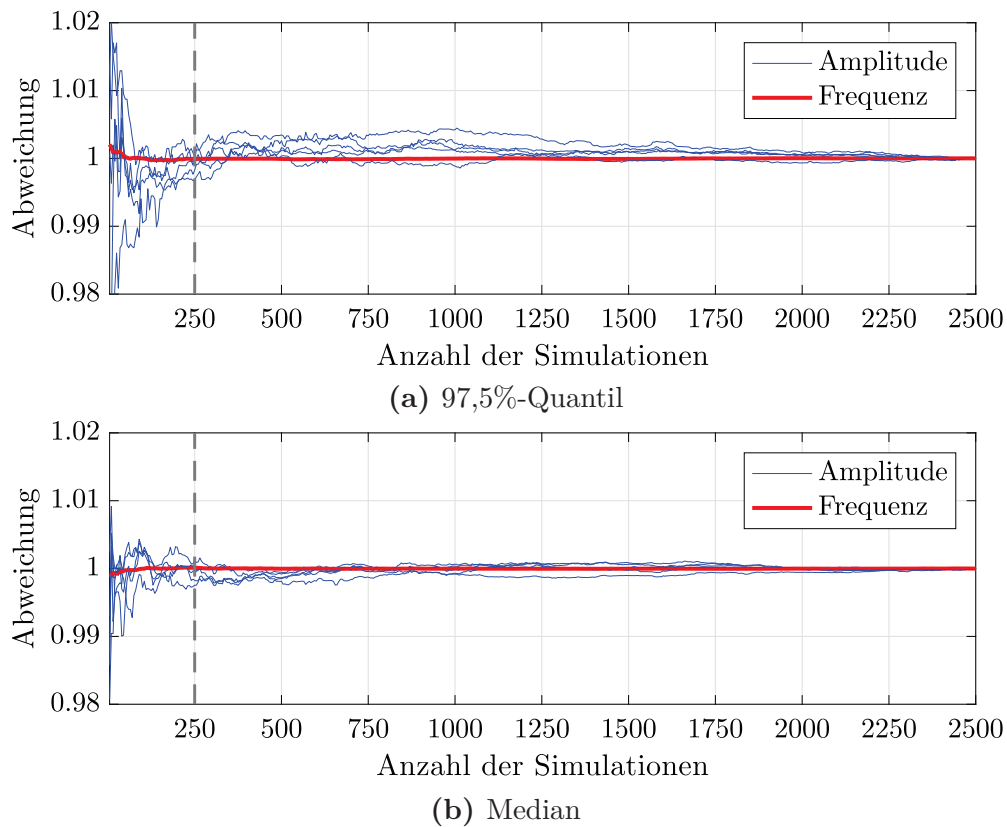


## 5.2 Stark vereinfachtes Modell

Die Berechnungen in diesem Kapitel basieren auf dem stark vereinfachten Modell (siehe **Abschnitt 4.1**). Analysiert werden die ersten drei auftretenden Modefamilien: erste Biegung, erste Torsion und zweite Biegung. Dabei werden jeder Schaufel individuelle Materialparameter zugewiesen. Für die analysierten Modefamilien wird eine unterschiedliche Spannweite der Elastizitätsmodule angenommen. Es gilt  $\Delta E_{1F} = \Delta E_{2F} > \Delta E_{1T}$ . Analog zur Strukturverstimmung werden auch für die Dämpfungsverstimmung unterschiedliche Annahmen getroffen. Es gilt  $\zeta_{1F} = \zeta_{2F} > \zeta_{1T}$ . Alle Moden außerhalb des analysierten Bereichs werden mit  $\zeta \gg \zeta_{1F,1T,2F}$  gedämpft.

### 5.2.1 Bewertung des Stichprobenumfangs

Für die folgenden Analysen wird für jede Wahrscheinlichkeitsverteilung ein fester Stichprobenumfang von  $n = 250$  Simulationen gerechnet. Dies stellt somit nur einen Anteil aus der Grundgesamtheit dar. Aus den Ergebnissen werden die Quantile bestimmter Prozentwerte ausgewertet.



**Abbildung 5.2:** Ausgewählte Quantile der maximalen Amplitude und Resonanzfrequenz für normalverteilte Strukturverstimmung und verschiedene Dämpfungsverstimnungen in Abhängigkeit der Simulationszahl

Deshalb wird im Voraus betrachtet, welche Quantile in guter Näherung ausgewertet werden können und wie genau der vorgegebene Stichprobenumfang die Grundgesamtheit abbildet. Dazu wird angenommen, dass ein deutlich größerer Stichprobenumfang von 2500 Simulationen die Grundgesamtheit ausreichend genau approximiert.

Für diesen Stichprobenumfang werden exemplarisch für normalverteilte Strukturverstimmung und die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Dämpfungsverstimmung stationäre fremderregte Simulationen durchgeführt. In **Abbildung 5.2** sind die 97,5%-Quantile sowie der Median der Amplituden und Frequenzen in Abhängigkeit der Simulationszahl für die erste Biegung dargestellt. Dabei sind die Amplituden und Frequenzen auf den Wert bei 2500 Simulationen normiert. Die gerechnete Anzahl von 250 Simulationen ist durch die gestrichelte grau Linie markiert.

Die Amplitude zeigt eine deutlich stärkere Spannweite als die Resonanzfrequenzen. Deshalb wird die Bewertung auf Grundlage der Amplituden durchgeführt.

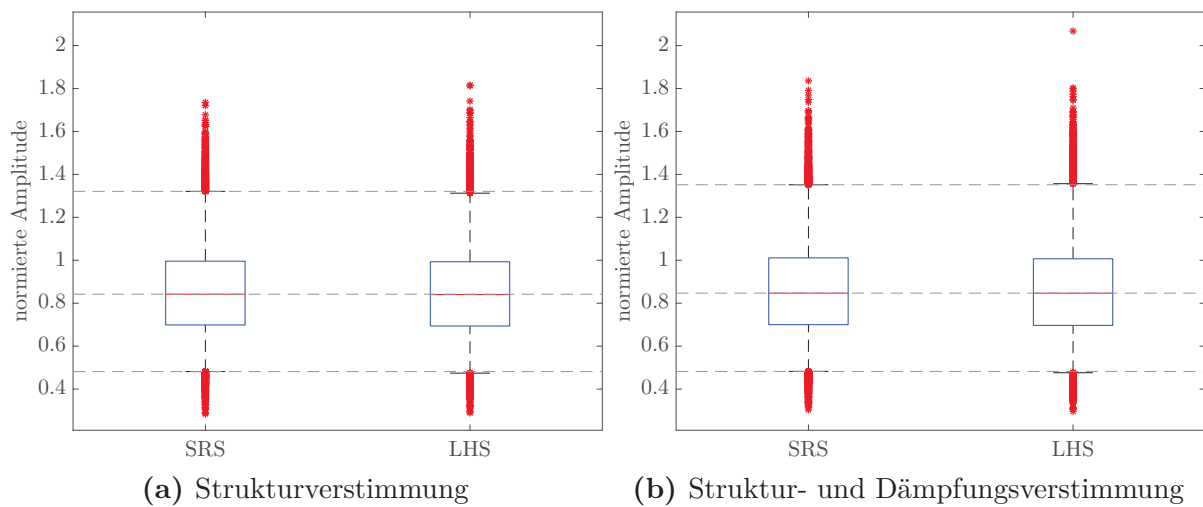
Für den Stichprobenumfang  $n = 250$  wird das 97,5%-Quantil mit einer Abweichung  $\delta_{97,5\%} = \pm 0,50\%$  ermittelt. Eine Auswertung des 99%-Quantils ergibt eine größere Abweichung. Des Weiteren führt eine Auswertung des 95%-Quantils zu keiner deutlichen Reduktion der Spannweite. Um ein möglichst hohes Quantil bei einer geringen Streuung auszuwerten, erfolgt deshalb im weiteren Verlauf der Arbeit die Auswertung der maximalen Werte anhand des 97,5%-Quantils. Der Median lässt sich mit der Abweichung  $\delta_{median} = \pm 0,25\%$  auswerten.

### 5.2.2 Probabilistischer Vergleich der Sampling Methoden

In **Abschnitt 3.2** werden das Simple Random Sampling (SRS) und das Latin Hypercube Sampling (LHS) sowie deren Vorteile vorgestellt. Aufgrund der Aufteilung der Verteilungsfunktion und entsprechender Zuordnung der Zufallszahlen wird mit dem Latin Hypercube Sampling der Wertebereich der einzelnen Parameter besser abgedeckt. Für die durchgeführten Analysen stellt jedoch bei der Modellierung des Elastizitätsmoduls jede Schaufel bzw. bei der Modellierung der modalen Dämpfung jeder Mode einen Parameter dar. Aus diesen Parametern ergibt sich ein kombinierter Einfluss auf die Schwingungsantwort.

Deshalb wird nachfolgend analysiert, ob sich mit dem Latin Hypercube Sampling auch ein Vorteil für die Analyse der gesamten Turbinenlaufstufe ergibt. Dazu wird das Simple Random Sampling selbst implementiert, wohingegen für das Latin Hypercube Sampling auf das Probabilistiktool PROSi des Instituts für Strömungsmechanik der TU Dresden zurückgegriffen wird [31].

In **Abbildung 5.3** sind die Box-Plots der maximalen Amplitude pro Schaufel dargestellt. Grundlage sind 250 Simulationen mit normalverteilter Strukturverstimmung und konstanter Dämpfung sowie 250 Simulationen mit normalverteilter Strukturverstimmung und



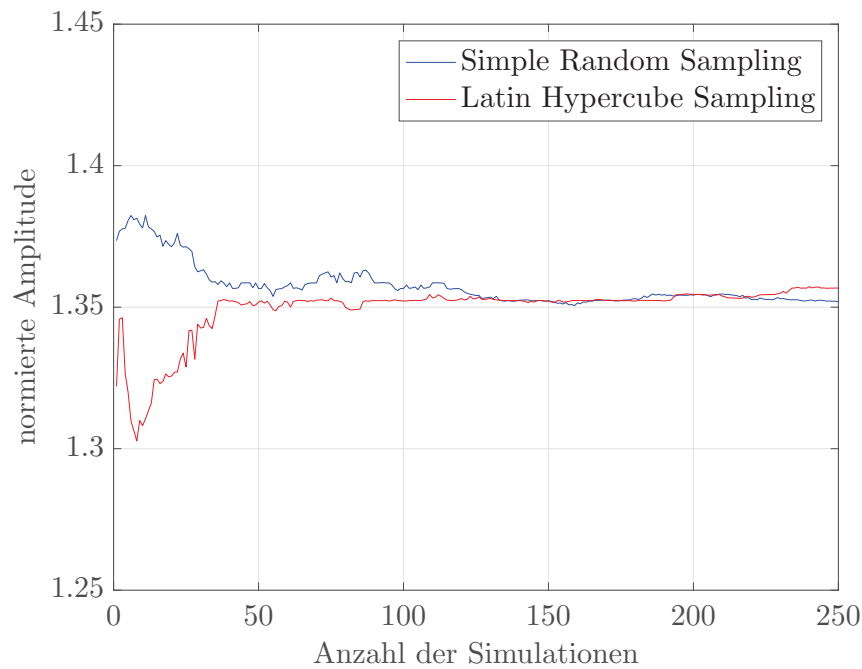
**Abbildung 5.3:** Box-Plots der maximalen Amplitude pro Schaufel

normalverteilter Dämpfungsverstimmung. Die Eingangsgrößen der Simulationen werden jeweils einmal mittels Simple Random Samplings und einmal mittels Latin Hypercube Samplings erzeugt. Mit den grau gestrichelten Linien sind das 97,5%-Quantil, der Median und das 2,5%-Quantil für das Simple Random Sampling markiert.

Die maximale Amplitude wird bei Strukturverstimmung und konstanter Dämpfung für beide Sampling Methoden vergleichbar berechnet. Dementgegen ergibt sich bei Struktur- und Dämpfungsverstimmung ein größerer Unterschied in der maximalen Amplitude zwischen dem Latin Hypercube Sampling und dem Simple Random Sampling. Bei Betrachtung der Quantile und des Medians ergibt sich eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse für beide Sampling Methoden. Dies gilt für die Strukturverstimmung bei konstanter Dämpfung sowie für die Strukturverstimmung und gleichzeitige Dämpfungsverstimmung.

**Abbildung 5.4** zeigt den Verlauf des 97,5%-Quantils der maximalen Amplitude in Abhängigkeit der Simulationszahl für normalverteilte Strukturverstimmung und normalverteilte Dämpfungsverstimmung. Die Eingangsgrößen der Simulationen werden jeweils einmal mittels Simple Random Samplings und einmal mittels Latin Hypercube Samplings erzeugt. Hierbei zeigen beide Sampling Methoden starke Schwankungen des 97,5%-Quantils bis zu einer Anzahl von  $n \approx 40$  Simulationen. Ab dieser Simulationszahl ergibt sich für beide Methoden ein annähernd konstanter Verlauf des 97,5%-Quantils.

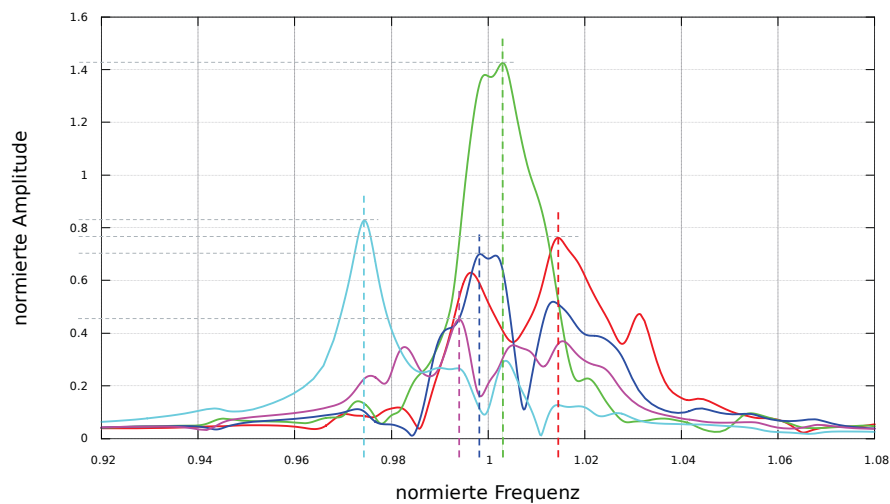
Insgesamt erzielen beide Sampling Methoden ähnliche Ergebnisse. Bei Betrachtung der maximalen Amplitude für Struktur- und Dämpfungsverstimmung ergibt sich eine höhere maximale Amplitude mit dem Latin Hypercube Sampling. Allerdings tritt diese lediglich bei einer Simulation auf. Die Betrachtung des 97,5%-Quantils in Abhängigkeit der Simulationszahl zeigt ab einer Anzahl von  $n \approx 40$  Simulationen keinen deutlichen Unterschied des Latin Hypercube Samplings gegenüber dem Simple Random Sampling. Aus diesem Grund



**Abbildung 5.4:** Verlauf des 97,5%-Quantils der maximalen Amplitude in Abhängigkeit der Simulationszahl

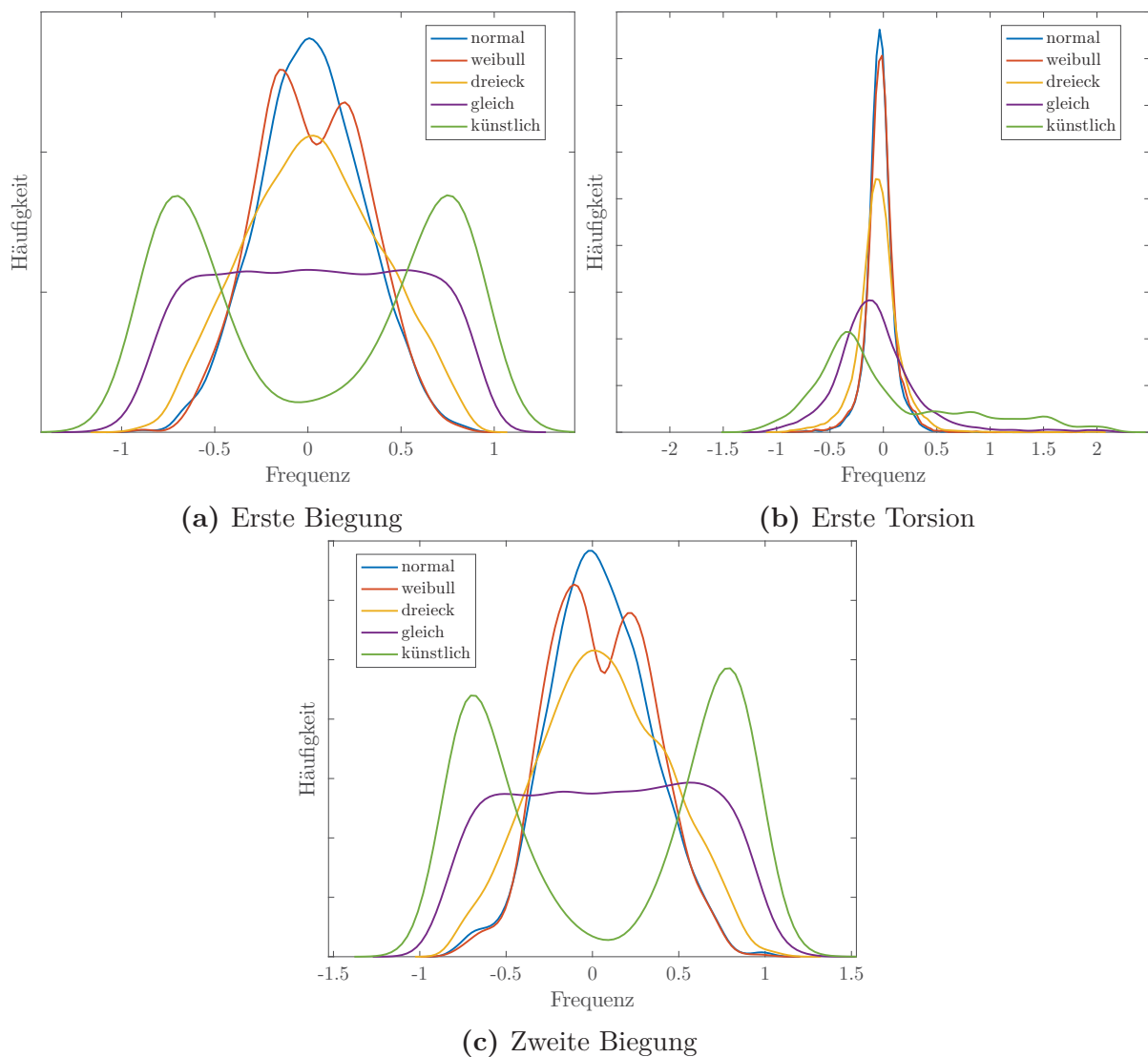
wird zur Erzeugung der Eingangsgrößen im weiteren Verlauf der Arbeit das selbst implementierte Simple Random Sampling verwendet. Dies hat den zusätzlichen Vorteil, dass direkt auf den Quellcode zugegriffen werden kann und somit auch modifizierte Verteilungen wie die Weibullverteilung und künstliche Verteilung analysiert werden können.

### 5.2.3 Frequenzanalyse



**Abbildung 5.5:** Exemplarische Darstellung der ausgewerteten Frequenzen

Zu Beginn wird die strukturverstimmte Turbinenlaufstufe betrachtet. Die modale Dämpfung ist hierbei konstant mit  $\zeta_{1F} = \zeta_{2F} > \zeta_{1T}$ . Dabei wird die Resonanzfrequenz, bei der die Amplitude ihr Maximum erreicht, für jede Schaufel analysiert. **Abbildung 5.5** zeigt die ausgewerteten Frequenzen an der Schwingungsantwort fünf exemplarischer Schaufeln. Diese werden für alle Simulationen aufgetragen. Somit können für die analysierten Modefamilien und verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen die in **Abbildung 5.6** dargestellten Dichtefunktionen abgeleitet werden. Hierbei sind die Resonanzfrequenzen auf die unverstimmte Resonanzfrequenz normiert und so skaliert, dass  $\pm 1$  die Spannweite des Verstimmungs-Inputs, des Elastizitätsmoduls, darstellt.



**Abbildung 5.6:** Dichtefunktionen der Resonanzfrequenzen für unterschiedliche Strukturverstimmung

Es ergibt sich eine ähnliche Verteilung der Resonanzfrequenzen für die erste und zweite Biegung. Bei diesen Modefamilien zeigen die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsvertei-

lungen der Elastizitätsmodule untereinander einen deutlich unterschiedlichen Einfluss auf die Resonanzfrequenzen. Für die Normalverteilung und Dreiecksverteilung liegen die meisten Resonanzfrequenzen in der Nähe der unverstimmten Resonanzfrequenz. Bei weibullverteiltem Elastizitätsmodul ergeben sich zwei Maxima bei  $-0,25$  und  $0,25$ . Dies entspricht der modifizierten Form der Weibullverteilung der Elastizitätsmodule. Für die künstliche Verteilungen ergeben sich ebenfalls zwei Maxima. Diese liegen im Vergleich zur Weibullverteilung deutlich weiter auseinander bei  $-0,75$  und  $0,75$ . Auch hier entsprechen die Resonanzfrequenzen der Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Elastizitätsmodule. Die Gleichverteilung zeigt eine in etwa konstante Verteilung der Resonanzfrequenzen in dem Bereich von  $-0,75$  bis  $0,75$ .

Alle Verteilungen sind dabei näherungsweise symmetrisch um die unverstimmte Resonanzfrequenz. Die Spannweite um den Mittelwert ist für die künstliche Verteilung am größten, was sich auf deren künstliche Form zurückführen lässt. Es ergeben sich mit geringer Häufigkeit Resonanzfrequenzen außerhalb des Bereichs von  $-1$  bis  $+1$ .

Die Verteilungen der Resonanzfrequenzen der ersten Torsion weichen davon jedoch deutlich ab. Die Unterschiede der verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen lassen sich hierbei nicht mehr so deutlich erkennen.

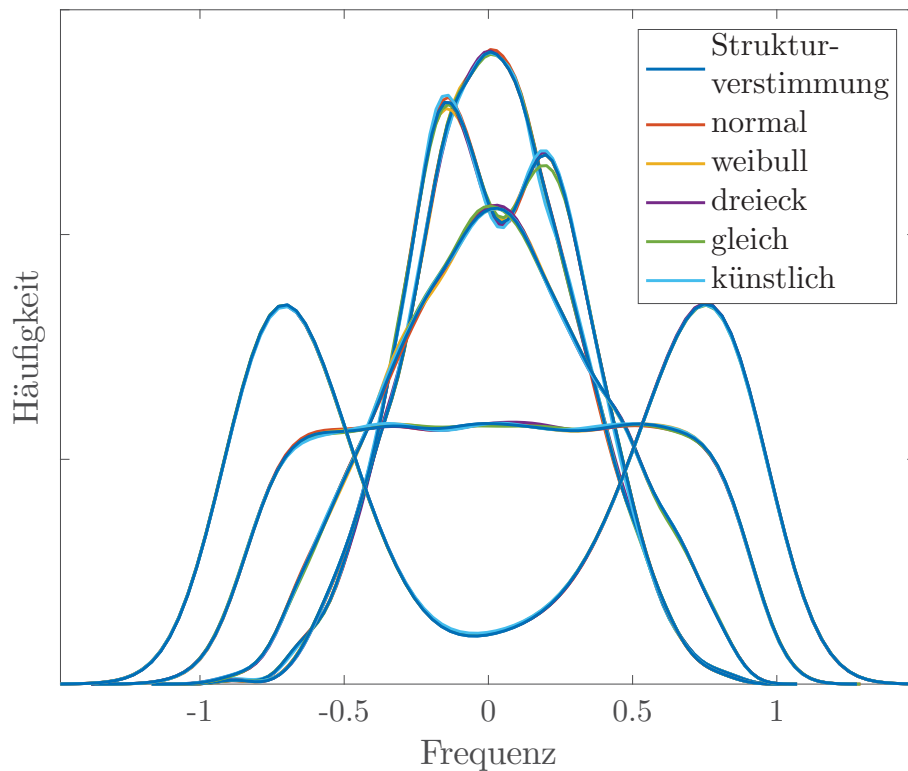
Die Betrachtung der Weibullverteilung und der künstlichen Verteilung zeigt analog zu der Normalverteilung und Dreiecksverteilung nur ein Maximum. Dies liegt für die Weibullverteilung bei der unverstimmten Resonanzfrequenz und für die künstliche Verteilung unterhalb davon bei circa  $-0,5$ . Des Weiteren lässt sich keine konstante Verteilung der Resonanzfrequenzen für die Gleichverteilung erkennen. Hier bildet sich ähnlich zu der künstlichen Verteilung ein Maximum unterhalb der unverstimmten Resonanzfrequenz aus. Zudem treten Resonanzfrequenzen in einem deutlich breiteren Bereich auf. Besonders für gleichverteilte und künstlich verteilte Elastizitätsmodule treten Resonanzfrequenzen im Bereich von  $-1,5$  bis zu  $+2$  auf. Außerdem treten für diese Verteilungen mehr Resonanzfrequenzen unterhalb der unverstimmten Resonanzfrequenz auf, so dass keine Symmetrie mehr erkennbar ist.

Die Ergebnisse lassen auf eine Abhängigkeit der Resonanzfrequenzen und der Schwingungsform schließen.

### **Einfluss der Dämpfung auf die Resonanzfrequenzen**

Als nächstes wird der Einfluss der Dämpfung auf die Resonanzfrequenzen betrachtet. Dazu wird zusätzlich zu der Strukturverstimmung eine Dämpfungsverstimmung aufgebracht. Analog zu dem vorherigen Abschnitt werden die Resonanzfrequenz, bei der die Amplitude ihr Maximum erreicht, für jede Schaufel analysiert.

In **Abbildung 5.7** sind exemplarisch für die erste Biegung die Dichtefunktionen der



**Abbildung 5.7:** Dichtefunktion der Resonanzfrequenzen für unterschiedliche Dämpfungsverstimmung

Resonanzfrequenzen dargestellt. Dabei beschreibt die dunkelblaue Linie den Fall mit Strukturverstimmung und konstanter Dämpfung. Die übrigen Farben zeigen die Resonanzfrequenzen für unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Dämpfungsverstimmung. Dabei zeigen die Dichtefunktionen einen identischen Verlauf. Dieses Verhalten lässt sich für alle analysierten Modelfamilien betrachten.

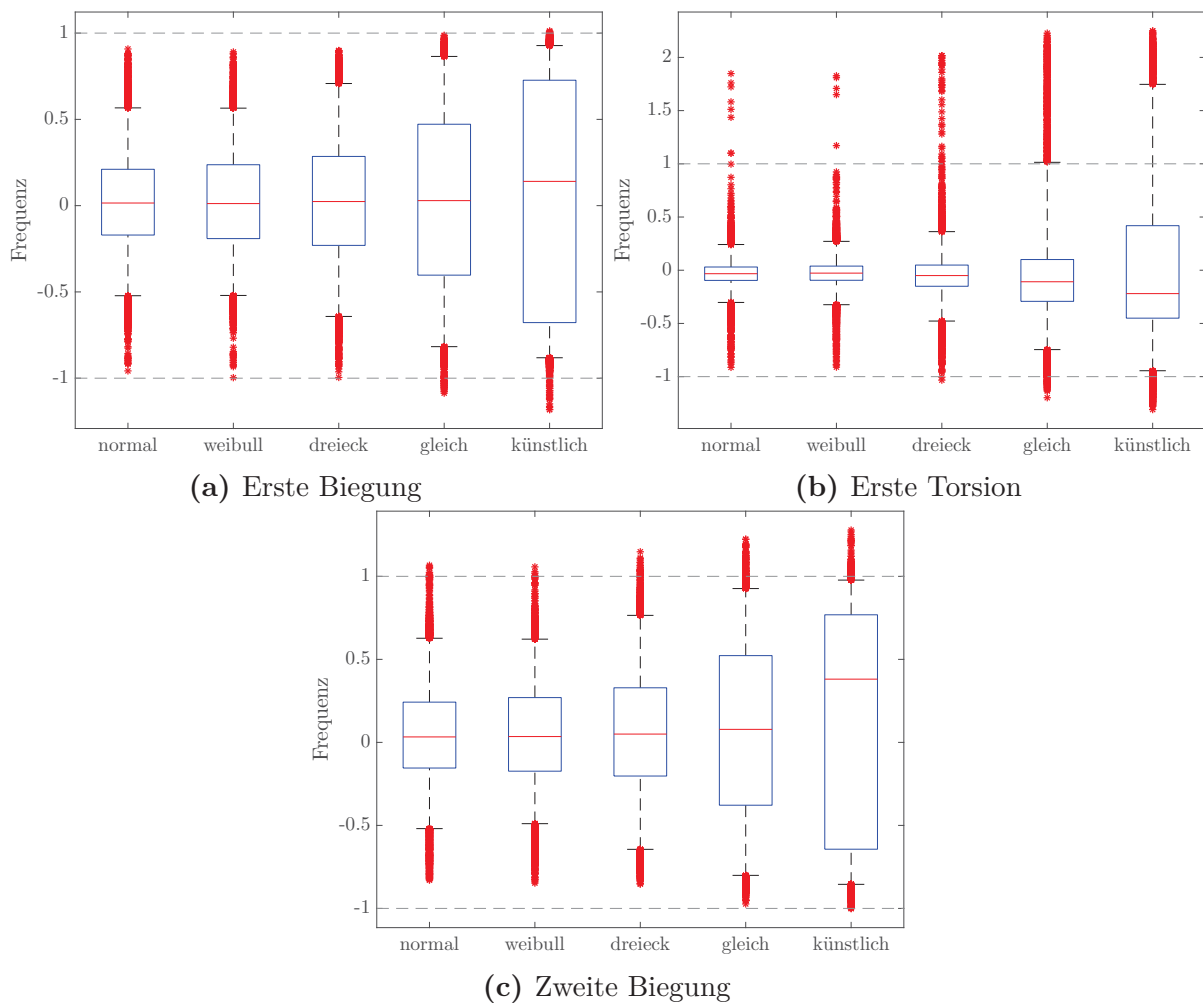
Somit hat die Dämpfungsverstimmung keinen Einfluss auf die Resonanzfrequenz. Deshalb ist es bei der weiteren Auswertung der Resonanzfrequenzen gerechtfertigt, lediglich das strukturverstimmte System bei konstanter modaler Dämpfung zu betrachten.

### Spannweite der Resonanzfrequenzen

Bei der Betrachtung der Dichtefunktionen treten für alle Modelfamilien Resonanzfrequenzen außerhalb der Spannweite des Elastizitätsmoduls auf. Um diese Spannweite der Resonanzfrequenzen quantifizieren zu können, wird der Box-Plot genutzt (siehe **Abschnitt 3.3**).

**Abbildung 5.8** zeigt die Resonanzfrequenzen für die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen des Elastizitätsmoduls. Mit den grau gestrichelten Linien ist die Spannweite des Elastizitätsmoduls dargestellt. In dieser Darstellung ergibt sich erneut eine Vergleichbarkeit der ersten und zweiten Biegung.

Für die erste Biegung liegen bei Normalverteilung, Weibullverteilung sowie Dreiecksvertei-



**Abbildung 5.8:** Box-Plots der Resonanzfrequenzen für unterschiedliche Strukturverstimmung

lung alle Resonanzfrequenzen innerhalb der Spannweite des Elastizitätsmoduls. Zudem treten  $\approx 95\%$  der Resonanzfrequenzen innerhalb eines Bereichs von  $\pm 50\%$  der Spannweite auf und somit in der Nähe der unverstimmten Resonanzfrequenz. Die wenigen Resonanzfrequenzen außerhalb der Spannweite bei gleichverteilt und künstlich verteiltem Elastizitätsmodul lassen sich statistisch als Ausreißer deklarieren.

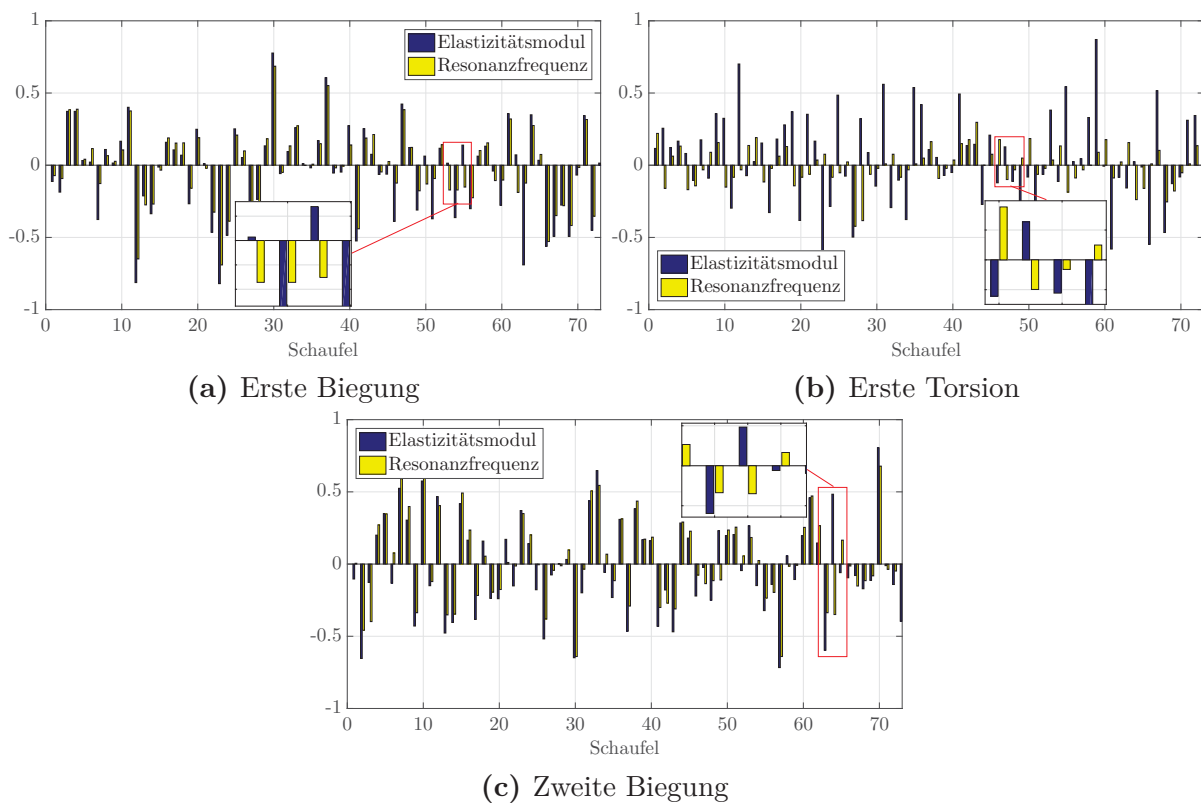
Für die zweite Biegung liegen für alle Verteilungen wenige Resonanzfrequenzen außerhalb der Spannweite des Elastizitätsmoduls. Diese lassen sich jedoch ebenfalls statistisch als Ausreißer deklarieren. Des Weiteren liegt der Median bei künstlicher Verteilung oberhalb der unverstimmten Resonanzfrequenz. Dementsprechend treten häufiger Resonanzen in diesem Bereich auf. Für beide Modfamilien liegen weder das 2,5%-Quantil noch das 97,5%-Quantil außerhalb der Spannweite des Elastizitätsmoduls.

Dementgegen weist die erste Torsionsmode für Resonanzfrequenzen oberhalb der unverstimmten Resonanzfrequenz eine mehr als doppelt so große Spannweite wie das Elas-



tizitätsmodul auf. Bei Betrachtung der Normalverteilung und Weibullverteilung lassen sich diese statistisch als Ausreißer deklarieren. Konträr dazu liegen für die Gleichverteilung sowie künstliche Verteilung das 97,5%-Quantil geringfügig bzw. deutlich außerhalb der Spannweite des Elastizitätsmoduls. Aufgrund der großen Spannweite der Resonanzfrequenzen oberhalb der unverstimmten Resonanzfrequenz ergibt sich bei Betrachtung der ersten Torsion ein breiter Frequenzbereich in dem Resonanzen auftreten können. Dies führt dazu, dass die Schwingung in einem großen Drehzahlbereich angeregt werden kann. Die deutlich unterschiedliche Spannweite für die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zeigt darüber hinaus die Notwendigkeit, die zugrundeliegende Verteilung des Verstimmungs-Inputs zu kennen.

### Probabilistischer Vergleich des Elastizitätsmoduls mit der Resonanzfrequenz

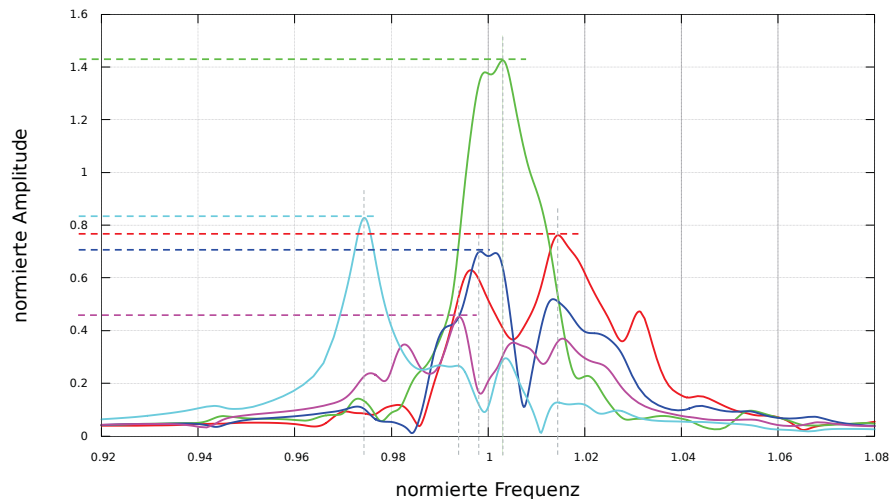


**Abbildung 5.9:** Probabilistischer Vergleich der Elastizitätsmodule und Resonanzfrequenzen

Bei den Dichtefunktionen der Resonanzfrequenzen der ersten und zweiten Biegung in **Abbildung 5.6** lassen sich klar die Charakteristika der Wahrscheinlichkeitsverteilungen des Verstimmungs-Inputs wiedererkennen. Deshalb wird überprüft, ob sich für die gekoppelten Schaufeln im Vollmodell ein direkter Zusammenhang zwischen dem Verstimmungs-Input, also dem Elastizitätsmodul, und der Resonanzfrequenz erkennen lässt. Dazu werden je

Modelfamilie zufällig für eine Verstimmungsverteilung die Resonanzfrequenzen und das Elastizitätsmodul pro Schaufel nebeneinander aufgetragen. Die Ordinate ist hierbei auf die Spannweite der Resonanzfrequenzen normiert. Für die erste und zweite Biegung zeigt sich größtenteils ein direkter Zusammenhang. Jedoch lässt sich dieser nicht eindeutig für alle Schaufeln erkennen. In den vergrößerten Ausschnitten sind die Abweichungen dargestellt. Bei Betrachtung der ersten Torsion stellt sich kein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Resonanzfrequenz und dem Elastizitätsmodul mehr ein. Daraus folgt, dass aus gemessenen Resonanzfrequenzen für das Vollmodell keine eindeutigen Aussagen über die Elastizitätsmodule der einzelnen Schaufeln möglich sind.

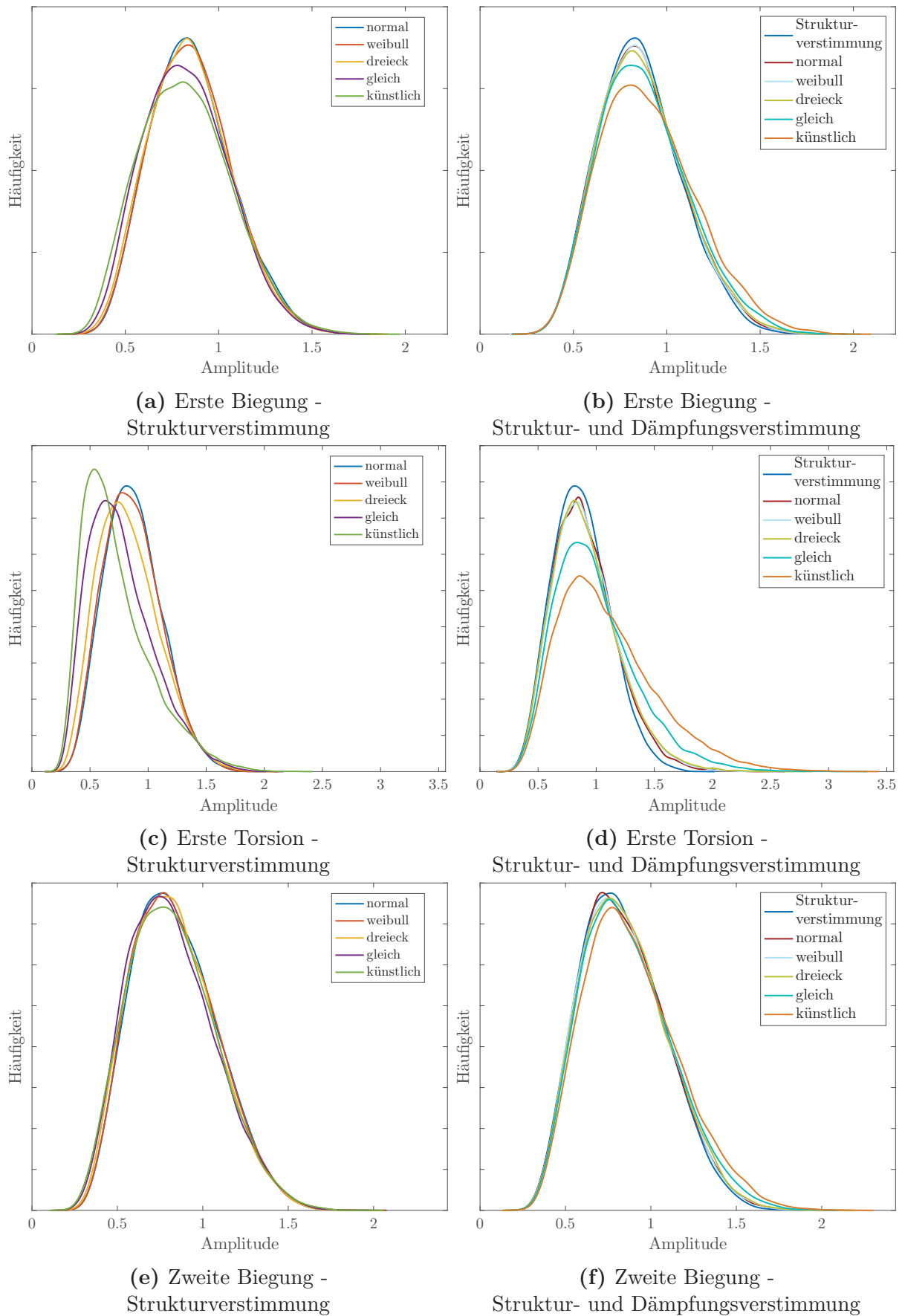
### 5.2.4 Amplitudenanalyse



**Abbildung 5.10:** Exemplarische Darstellung der ausgewerteten Amplituden

Als nächstes werden die Amplituden der verstimmten Turbinenlaufstufe betrachtet. Dabei werden die maximalen Amplituden für jede Schaufel analysiert. **Abbildung 5.10** zeigt die ausgewerteten Amplituden an der Schwingungsantwort fünf exemplarischer Schaufeln. Diese werden für alle Simulationen aufgetragen. Somit ergeben sich für die analysierten Modelfamilien und verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen die in **Abbildung 5.11** dargestellten Dichtefunktionen. Auf der linken Seite ist hierbei das System mit Strukturverstimmung und konstanter modaler Dämpfung dargestellt. Auf der rechten Seite ist der Einfluss der Dämpfungsverstimmung dargestellt. Dazu wird exemplarisch von normalverteilter Strukturverstimmung ausgegangen. Die Amplitude ist auf die Amplitude des unverstimmten Systems normiert.

Es zeigt sich eine ähnliche charakteristische Form für alle Modelfamilien und Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Analog zu den Resonanzfrequenzen lässt sich erneut eine gute Vergleich-



**Abbildung 5.11:** Dichtefunktionen der maximalen Amplitude pro Schaufel für verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen

barkeit der ersten und zweiten Biegung erkennen. Hierbei führen die Normalverteilung, Weibullverteilung sowie Dreiecksverteilung auf den ersten Blick zu identischen Ergebnissen. Lediglich die Gleichverteilung und künstliche Verteilung zeigen geringfügige Abweichungen. Dementgegen ist der Einfluss der unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei Betrachtung der ersten Torsion größer. Hier ergeben sich deutlich stärkere Abweichungen der Amplitude. Zudem ist ein größerer Einfluss der Dämpfungsverstimmung erkennbar. Besonders auffällig ist dabei die künstliche Verteilung.

### Median der Amplitude

Für alle Modefamilien und Wahrscheinlichkeitsverteilungen liegt auf den ersten Blick die Mehrheit der Amplituden unterhalb der Amplitude des unverstimmten Systems. Aus diesem Grund wird in nachfolgendem Abschnitt der Median der Amplitude analysiert. Der Median wird anstelle des Mittelwerts gewählt, da dieser eine geringere Empfindlichkeit gegenüber Ausreißern aufweist. Somit ist für die Anzahl von 250 Simulationen eine bessere Vergleichbarkeit innerhalb der Verteilungen gewährleistet. Bei einem exemplarischen Vergleich des Medians und Mittelwerts zeigt sich allerdings, dass zwischen beiden Werten nur geringfügige Abweichungen auftreten (siehe **Anhang A**).

**Abbildung 5.12** zeigt die maximale Amplitude pro Schaufel für die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Mit der grau gestrichelten Linie ist die Amplitude der unverstimmten Turbinenlaufstufe dargestellt.

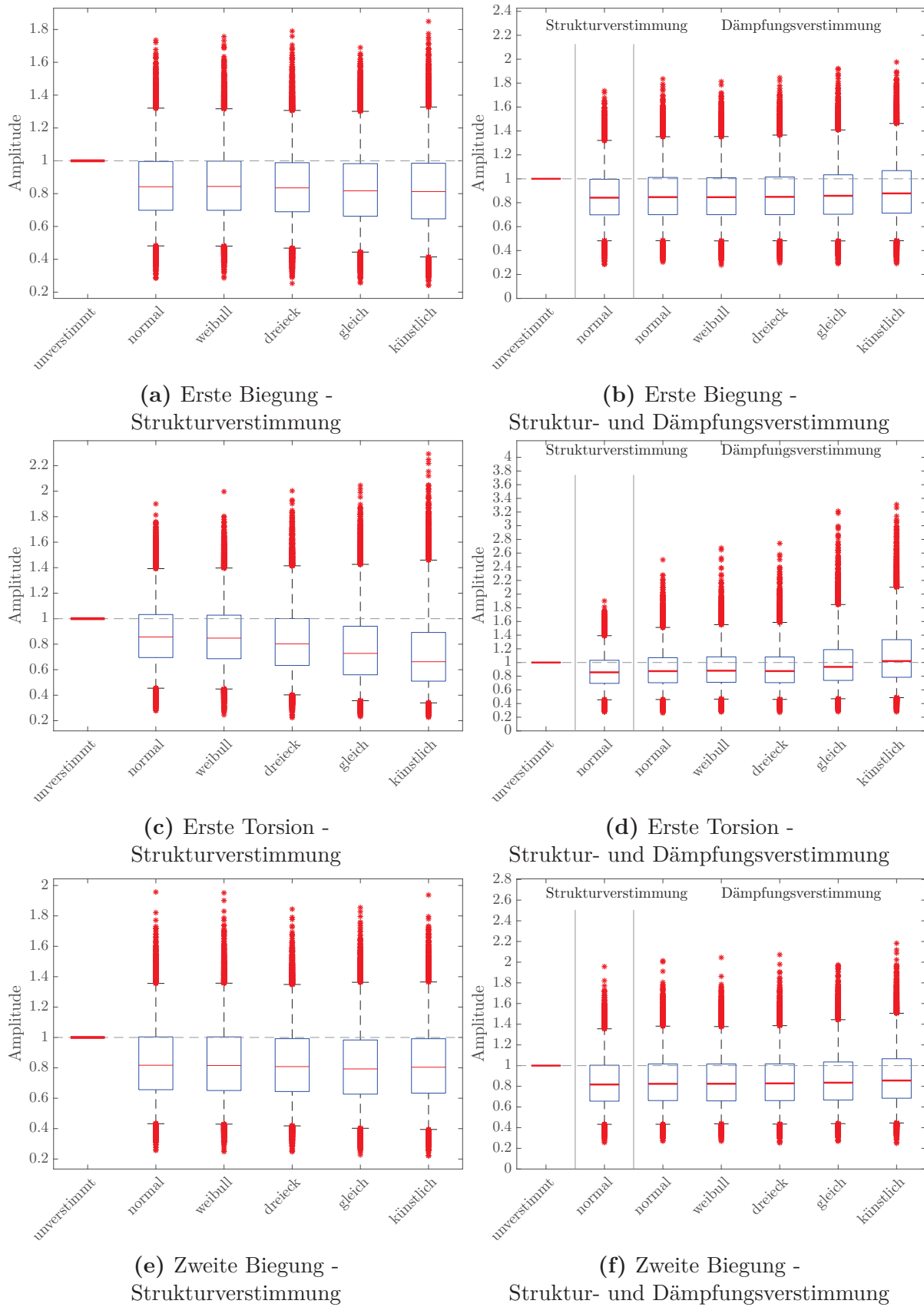
Zunächst wird die strukturverstimmte Turbinenlaufstufe ohne Dämpfungsverstimmung betrachtet. Hierbei zeigt sich im verstimmten Fall im Vergleich zum unverstimmten Referenzfall eine deutliche Reduktion des Medians.

Diese Reduktion tritt für alle betrachteten Modefamilien und für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf. Des Weiteren ist der Betrag der Reduktion bei Betrachtung der ersten und zweiten Biegung für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen in etwa konstant.

Lediglich bei Betrachtung der ersten Torsion ergibt sich für die Gleichverteilung und künstliche Verteilung eine weitere Reduktion des Medians.

Betrachtet man lediglich die Normalverteilung und Weibullverteilung liegt die Reduktion für alle drei Modefamilien systematisch im Bereich von 15% bis 20%. Die maximale Abweichung des Medians vom unverstimmten System zeigt die zweite Torsion für die künstliche Verteilung mit  $-35\%$ .

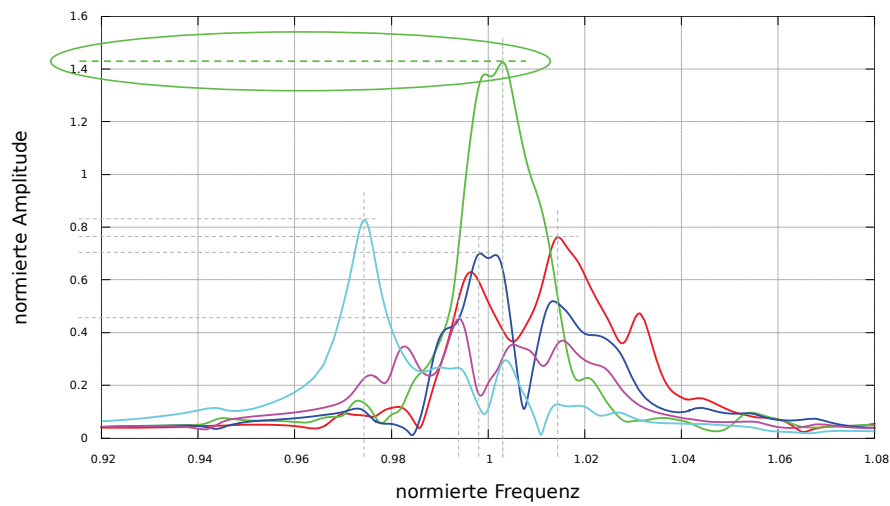
Die rechte Seite der **Abbildung 5.12** zeigt den Einfluss der Dämpfungsverstimmung. Ausgehend von exemplarisch normalverteilter Strukturverstimmung sind die Amplituden für unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Dämpfungsverstimmung dargestellt. Dabei zeigen die Normalverteilung, Weibullverteilung und Dreiecksverteilung keinen weiteren Einfluss auf den Median der Amplituden. Bei Betrachtung der Gleichverteilung



**Abbildung 5.12:** Box-Plots der maximalen Amplitude pro Schaufel für verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen

und der künstlichen Verteilung zeigt sich eine Erhöhung des Medians und somit eine Annäherung zum unverstimmten System. Der maximale Einfluss der Dämpfungsverstimmung ergibt sich für die künstlich verteilte Dämpfungsverstimmung. Dies führt für die erste Torsion zu einem identischen Median mit dem unverstimmten System.

### Maximale Amplitude



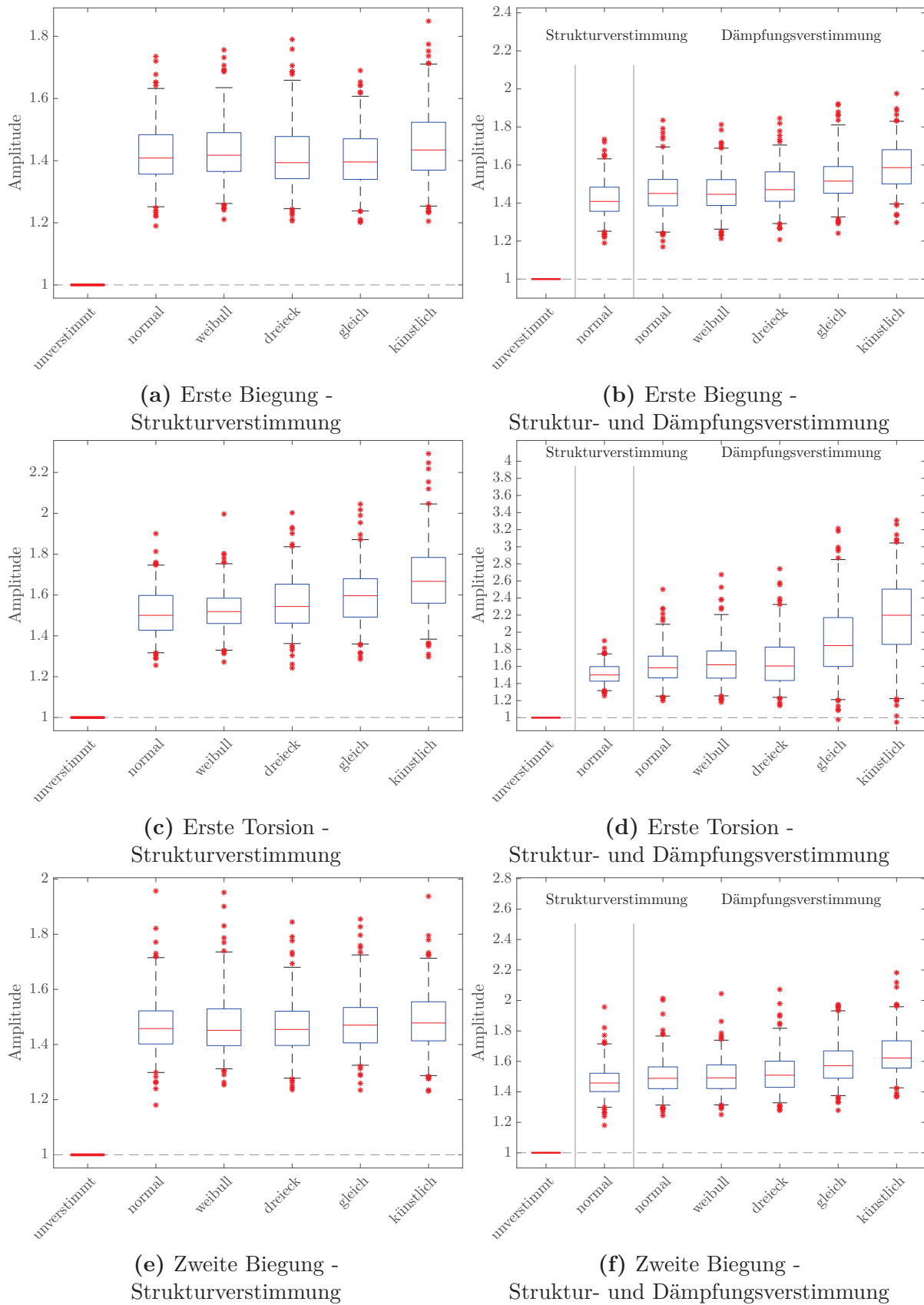
**Abbildung 5.13:** Exemplarische Darstellung der ausgewerteten maximalen Amplitude

Entscheidend für die Lebensdauer ist die maximale Amplitude. Deshalb wird in diesem Unterkapitel die maximale Amplitude der Turbinenlaufstufe analysiert. **Abbildung 5.13** zeigt die ausgewerteten maximalen Amplituden an der Schwingungsantwort fünf exemplarischer Schaufeln. Diese wird für alle Simulationen aufgetragen. Das Whitehead-Limit bei konstanter Dämpfung (vgl. Gleichung (2.29)) ergibt sich in diesem Fall mit 72 Schaufeln zu

$$\alpha_{max} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{72} \right) \approx 4,74. \quad (5.1)$$

Zunächst wird die strukturverstimmte Turbinenlaufstufe ohne Dämpfungsverstimmung betrachtet. Die maximale Amplitude liegt hierbei für alle Modfamilien und Wahrscheinlichkeitsverteilungen deutlich unterhalb des Whitehead-Limits.

Bei Betrachtung der ersten Biegung zeigen sich zwischen den verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen nur geringe Unterschiede. Die maximale Amplitude pro verstimmter Turbinenlaufstufe ist für alle Simulationen höher als die maximale Amplitude der unverstimmten Turbinenlaufstufe. Im Mittel ergibt sich eine um 40% erhöhte maximale Amplitude im Vergleich zum unverstimmten System. Die 97,5%-Quantile liegen für die Normalverteilung, Weibullverteilung, Dreiecksverteilung und Gleichverteilung im Bereich von 1,60 – 1,65. Die künstliche Verteilung zeigt mit 1,72 das höchste 97,5%-Quantil und



**Abbildung 5.14:** Box-Plots der maximalen Amplitude pro Turbinenlaufstufe für verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen

mit 1,83 das höchste Maximum.

Die maximalen Amplituden der ersten Torsion zeigen größere Unterschiede für die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Zudem treten hierbei größere maximale Amplituden auf. Für die Normalverteilung und Weibullverteilung liegt das 97,5%-Quantil bei 1,75. Die höchsten Werte ergeben sich erneut für die künstliche Verteilung. Hierbei liegt das 97,5%-Quantil bei 2,05 und das Maximum bei 2,3. Dies stellt das Maximum für alle Modefamilien und Wahrscheinlichkeitsverteilungen dar. Daraus folgt, dass das Whitehead-Limit von 4,74 für die betrachtete Turbinenlaufstufe und die betrachteten Modefamilien sehr konservativ ist.

Bei der Betrachtung der zweiten Biegung ergeben sich ähnliche Ergebnisse für die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Das 97,5%-Quantil liegt im Bereich von 1,68 – 1,74. Das höchste Maximum zeigt die Normalverteilung bei 1,96.

Die rechte Seite der **Abbildung 5.14** zeigt den Einfluss der Dämpfungsverstimmung. Ausgehend von exemplarisch normalverteilter Strukturverstimmung sind die maximalen Amplituden pro Turbinenlaufstufe für unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Dämpfungsverstimmung dargestellt. Die zusätzliche Dämpfungsverstimmung führt für alle Modefamilien und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu einer Erhöhung des 97,5%-Quantils und des Maximums.

Der Einfluss der Dämpfungsverstimmung ist dabei für die erste und zweite Biegung ähnlich. Hier ergibt sich für die Normalverteilung, Weibullverteilung und Dreiecksverteilung eine Erhöhung des 97,5%-Quantils im Bereich von 5% – 10%. Die Gleichverteilung und künstliche Verteilung führen zu einer Erhöhung von 20%.

Besonders auffällig sind die Ergebnisse der ersten Torsion. Hier zeigt sich ein sehr starker Einfluss der Dämpfungsverstimmung. Die Normalverteilung, Weibullverteilung und Dreiecksverteilung führen zu einer weiteren Erhöhung des 97,5%-Quantils im Bereich von 35% – 60% sowie zu einer Erhöhung des Maximums um 60% – 85% im Vergleich zur maximalen Amplitude der unverstimmten Turbinenlaufstufe. Für die Gleichverteilung und künstliche Verteilung ergeben sich aufgrund der Dämpfungsverstimmung ein Maximum bei 3,2 und 3,3 und somit eine weitere Erhöhung um 145% und 155% im Vergleich zur Strukturverstimmung bei konstanter Dämpfung. Der kombinierte Effekt von Strukturverstimmung und Dämpfungsverstimmung führt damit zur dreifachen Amplitude der unverstimmten Turbinenlaufstufe. Außerdem ergeben sich für die Gleichverteilung und künstliche Verteilung maximale Amplituden unterhalb der maximalen Amplitude des unverstimmten Systems.

Die Dämpfungsverstimmung zeigt in diesem Abschnitt einen starken Einfluss auf die Amplitude. Dies ist auf den Ansatz der Dämpfungsmodellierung in dieser Arbeit zurückzuführen. In der Realität nimmt die Reibung und aerodynamische Dämpfung mit steigender



Amplitude zu. Somit werden die auftretenden Maxima stärker gedämpft. Dieser Effekt wird in dem gewählten Ansatz nicht berücksichtigt. Besonders die Überhöhungsfaktoren bei Betrachtung der ersten Torsion werden deshalb in der Realität nicht beobachtet.

Der Einfluss der unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zeigt allerdings analog zu der Frequenzanalyse die Notwendigkeit, die zugrundeliegende Verteilung des Verstimmungs-Inputs zu kennen.

## 5.3 Realitätsnahes Modell

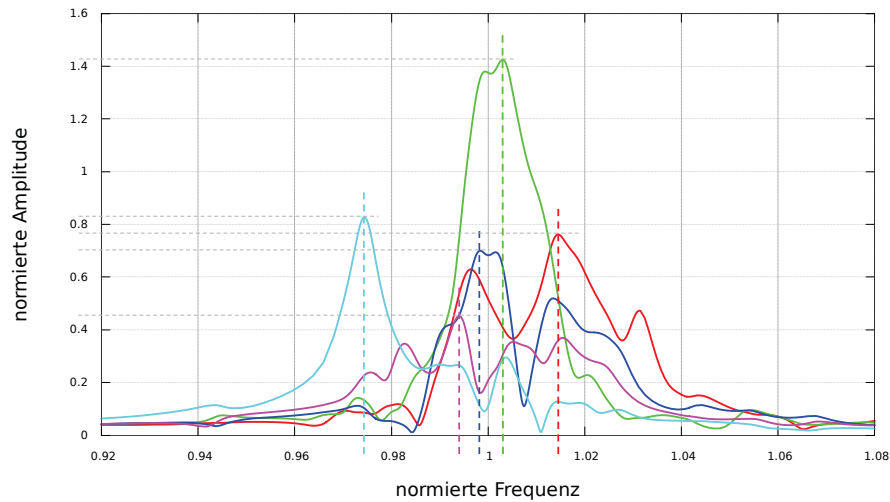
In diesem Kapitel sollen die an dem stark vereinfachten Modell gewonnenen Ergebnisse mit einem realitätsnahen Modell validiert werden. Analysiert werden die ersten drei auftretenden Modefamilien: erste Biegung, Mischform hauptsächlich erster Edgewise Biegung und Mischform hauptsächlich erster Torsion<sup>9</sup>. Dabei wird analog zum stark vereinfachten Modell für die analysierten Modefamilien eine unterschiedliche Spannweite der Elastizitätsmodule angenommen. Es gilt  $\Delta E_{1F} > \Delta E_{1E} = \Delta E_{1T}$ . Des Weiteren gilt für die Dämpfungsverstimmung  $\zeta_{1F} > \zeta_{1E} = \zeta_{1T}$ . Alle Moden außerhalb des betrachteten Bereichs werden mit  $\zeta \gg \zeta_{1F,1E,1T}$  gedämpft.

Die Dreiecksverteilung führt bei den Analysen des stark vereinfachten Modells zu keinen zusätzlichen Erkenntnissen, so dass diese nicht betrachtet wird.

Aufgrund der deutlich größeren Anzahl an Freiheitsgraden und somit deutlich erhöhten Rechenzeit im Vergleich zum stark vereinfachten Modell, werden für jede Wahrscheinlichkeitsverteilung jeweils  $n = 100$  Simulationen gerechnet. Dadurch erhöht sich die statistische Unsicherheit im Vergleich zu den Analysen des stark vereinfachten Modells.

### 5.3.1 Frequenzanalyse

In **Abschnitt 5.2.3** wird an dem stark vereinfachten Modell gezeigt, dass die Dämpfungsverstimmung keinen Einfluss auf die Resonanzfrequenzen hat. Dies zeigt sich auch bei den Analysen des realitätsnahen Modells. Deshalb wird für die folgende Auswertung der Resonanzfrequenzen lediglich die strukturverstimmte Turbinenlaufstufe bei konstanter modaler Dämpfung betrachtet. In **Abbildung 5.15** sind exemplarisch die ausgewerteten Frequenzen dargestellt.



**Abbildung 5.15:** Exemplarische Darstellung der ausgewerteten Frequenzen

### Spannweite der Resonanzfrequenzen

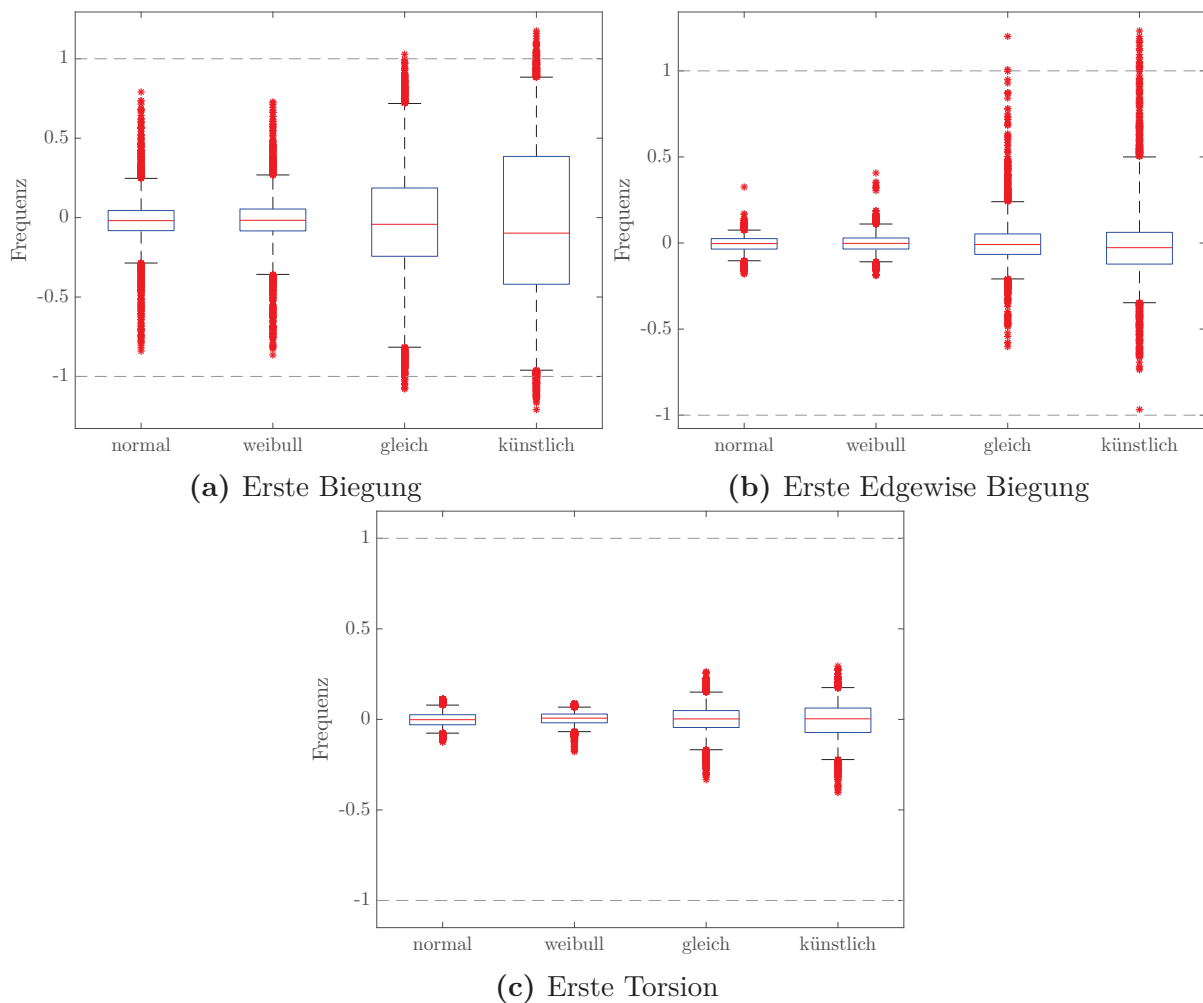
Die Analysen des stark vereinfachten Modells ergeben eine große Spannweite der Resonanzfrequenzen. Besonders für die erste Torsion zeigt die Resonanzfrequenz eine doppelt so große Spannweite wie das zugrundeliegende Elastizitätsmodul.

Für das realitätsnahe Modell werden analog zum stark vereinfachten Modell die Resonanzfrequenz, bei der die Amplitude ihr Maximum erreicht, für jede Schaufel analysiert.

**Abbildung 5.16** zeigt die Resonanzfrequenzen für die analysierten Modelfamilien und verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Hierbei sind die Resonanzfrequenzen auf die unverstimmte Resonanzfrequenz normiert und so skaliert, dass  $\pm 1$  die Spannweite des Verstimmungs-Inputs, des Elastizitätsmoduls, darstellt. Aufgrund der unterschiedlichen Schwingungsformen der Modelle ist nur ein direkter Vergleich der ersten Biegung möglich. Für die erste Biegung ergibt sich eine gute Übereinstimmung des stark vereinfachten Modells und des realitätsnahen Modells. Analog zu dem stark vereinfachten Modell treten bei gleichverteiltem und künstlich verteilter Elastizitätsmodul wenige Resonanzfrequenzen außerhalb der Spannweite auf. Diese lassen sich statistisch als Ausreißer deklarieren. Bei Betrachtung der Normalverteilung und Weibullverteilung liegen die 2,5%- und 97,5%-Quantile für das realitätsnahe Modell im Vergleich zu dem stark vereinfachten Modell näher an der unverstimmten Resonanzfrequenz und weisen somit eine geringere Streuung auf.

Bei Betrachtung der ersten Edgewise Biegung treten für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $\approx 95\%$  der Resonanzfrequenzen innerhalb eines Bereichs von maximal  $\pm 50\%$  der Spannweite auf. Für die Normalverteilung und Weibullverteilung liegen zudem  $\approx 95\%$  der

<sup>9</sup>Zur Übersichtlichkeit werden die Mischformen im weiteren Verlauf der Arbeit lediglich anhand der dominierenden Schwingungsform bezeichnet.



**Abbildung 5.16:** Box-Plots der Resonanzfrequenzen für unterschiedliche Strukturverformung

Resonanzfrequenzen innerhalb eines Bereichs von  $\pm 10\%$ . Für die Gleichverteilung und künstliche Verteilung treten wenige Resonanzfrequenzen außerhalb der Spannweite auf. Diese lassen sich statistisch als Ausreißer deklarieren.

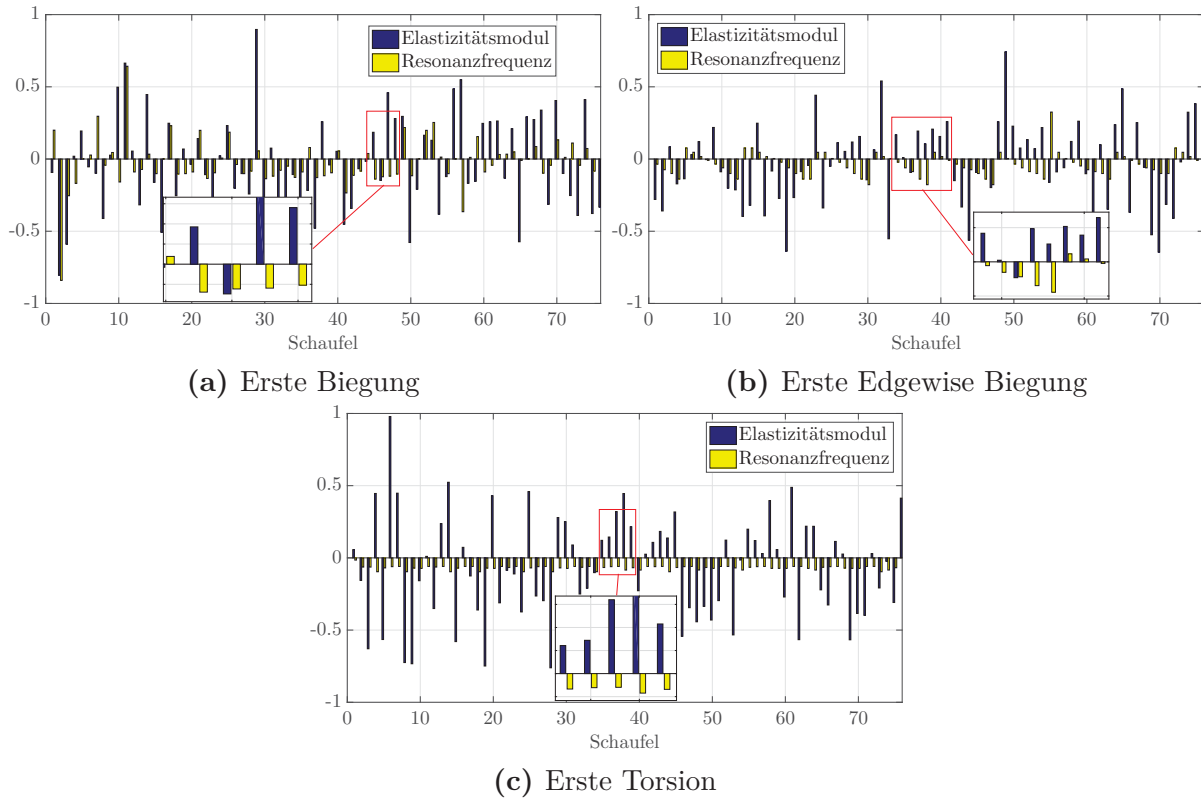
Die erste Torsion zeigt eine allgemein deutlich geringere Spannweite. Hier liegen die Resonanzfrequenzen für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen innerhalb eines Bereichs von maximal  $\pm 40\%$  der Spannweite des Elastizitätsmoduls.

Die größte Spannweite der Resonanzfrequenzen für die analysierten Modelfamilien und Wahrscheinlichkeitsverteilungen ergibt sich für die erste Biegung bei gleichverteilten und künstlich verteilten Elastizitätsmodulen. Hier liegen die 2,5%- und 97,5%-Quantile in der Nähe der maximalen Streuung des Elastizitätsmoduls. Eine doppelt so große Spannweite wie das Elastizitätsmodul kann für das realitätsnahe Modell allerdings nicht beobachtet werden.

Dass allgemein weniger Ausreißer im Vergleich zu dem stark vereinfachten Modell auftreten,

liegt an der geringeren Anzahl an Simulationen.

### Probabilistischer Vergleich des Elastizitätsmoduls mit der Resonanzfrequenz



**Abbildung 5.17:** Probabilistischer Vergleich der Elastizitätsmodule und Resonanzfrequenzen

Für die Resonanzfrequenzen zeigt sich bei Betrachtung der ersten und zweiten Biegung des stark vereinfachten Modells größtenteils ein Zusammenhang mit dem Elastizitätsmodul. Jedoch lässt sich dieser nicht eindeutig für alle Schaufeln erkennen. Deshalb wird ein probabilistischer Vergleich des Elastizitätsmoduls mit den Resonanzfrequenzen am realitätsnahen Modell durchgeführt.

Dazu werden je Modelfamilie zufällig für eine Verstimmungsverteilung die Resonanzfrequenzen und das Elastizitätsmodul pro Schaufel nebeneinander aufgetragen. Die Ordinate ist hierbei auf die Spannweite der Resonanzfrequenzen normiert.

Im Gegensatz zum stark vereinfachten Modell lässt sich für das realitätsnahe Modell für keine Modelfamilie ein Zusammenhang zwischen der Resonanzfrequenz und dem Elastizitätsmodul mehr erkennen.

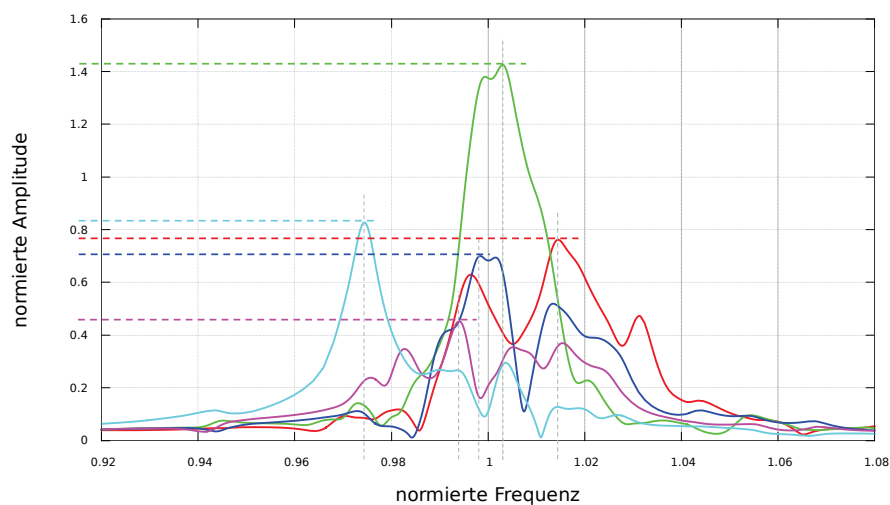
In Kombination mit den Kenntnissen über die Spannweite der Resonanzfrequenzen aus dem vorherigen Abschnitt lässt sich somit anhand der Bestimmung der Resonanzfrequenzen die Spannweite der Elastizitätsmodule abschätzen. Eine eindeutige Aussage über das

Elastizitätsmodul pro Schaufel ist mittels der Resonanzfrequenzen des Vollmodells jedoch nicht möglich.

### 5.3.2 Amplitudenanalyse

#### Median der Amplitude

Die Strukturverstimmung des stark vereinfachten Modells führt für alle Modefamilien und für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu einer deutlichen Reduktion des Medians der Amplitude im Vergleich zum unverstimmten Referenzfall.

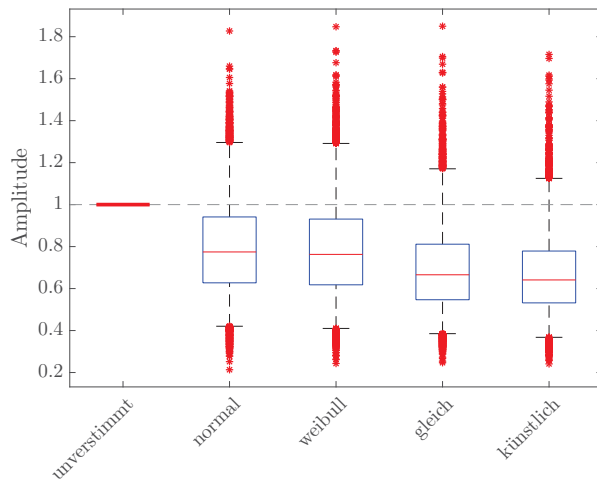
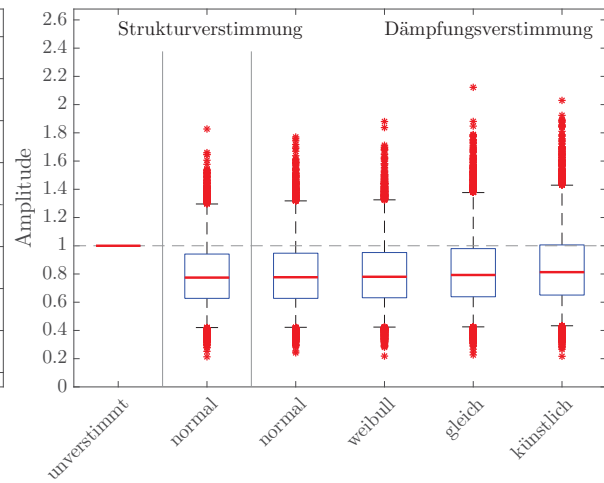
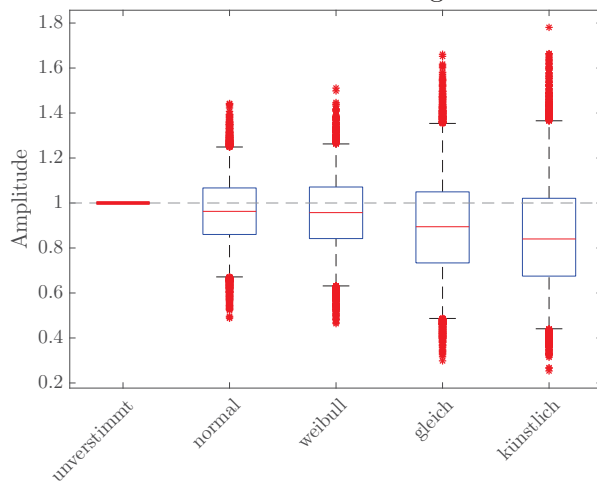
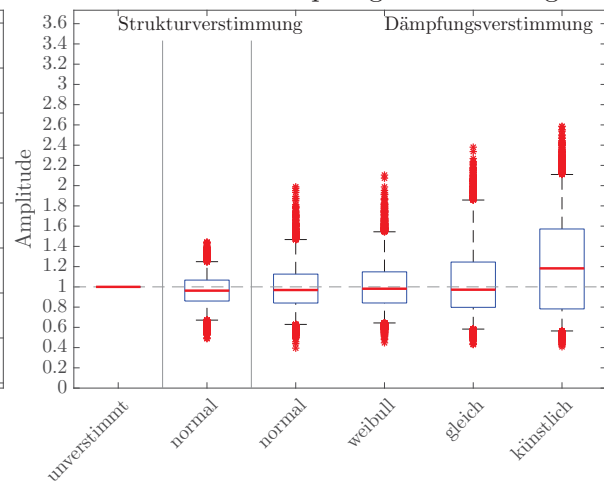
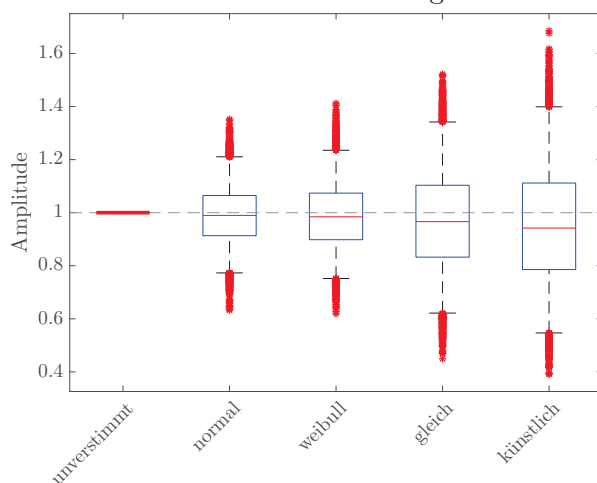
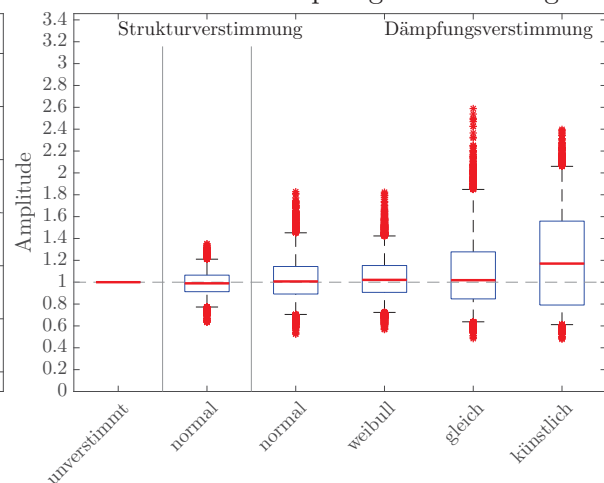


**Abbildung 5.18:** Exemplarische Darstellung der ausgewerteten Amplituden

**Abbildung 5.19** zeigt die maximalen Amplituden des realitätsnahen Modells pro Schaufel. Bei Betrachtung der Strukturverstimmung und konstanter Dämpfung lässt sich analog zu dem stark vereinfachten Modell eine Reduktion des Medians der Amplitude im Vergleich zum unverstimmten Referenzfall erkennen. Diese tritt für alle betrachteten Modefamilien und für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf.

Für die erste Biegung lassen sich die Amplituden des stark vereinfachten Modells und des realitätsnahen Modells gut vergleichen. Bei Betrachtung der Normalverteilung und Weibullverteilung liegt die Reduktion für beide Modelle identisch bei 20%. Lediglich die Gleichverteilung und künstliche Verteilung zeigen für das realitätsnahe Modell eine stärkere Reduktion des Medians.

Bei Betrachtung der ersten Edgewise Biegung und der ersten Torsion liegt der Median der Amplitude deutlich näher an dem unverstimmten System. Für die Normalverteilung und Weibullverteilung beträgt die Abweichung  $-5\%$ . Die Gleichverteilung und künstliche Verteilung zeigen eine stärkere Reduktion des Medians. Bei der künstlichen Verteilung beträgt diese maximal  $17\%$ .

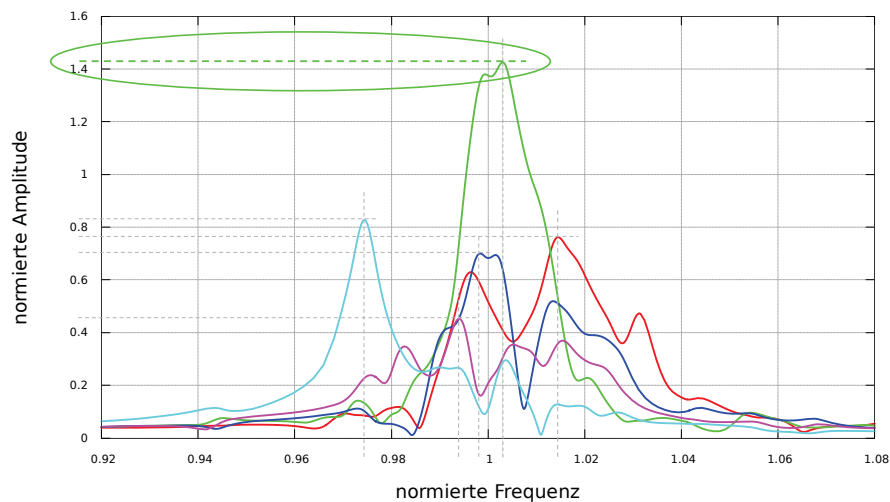
(a) Erste Biegung -  
Strukturverstimmung(b) Erste Biegung -  
Struktur- und Dämpfungsverstimmung(c) Erste Edgewise Biegung -  
Strukturverstimmung(d) Erste Edgewise Biegung -  
Struktur- und Dämpfungsverstimmung(e) Erste Torsion -  
Strukturverstimmung(f) Erste Torsion -  
Struktur- und Dämpfungsverstimmung

**Abbildung 5.19:** Box-Plots der maximalen Amplitude pro Schaufel für verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Die rechte Seite der **Abbildung 5.19** zeigt den Einfluss der Dämpfungsverstimmung. Ausgehend von exemplarisch normalverteilter Strukturverstimmung sind die Amplituden für unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Dämpfungsverstimmung dargestellt. Dabei zeigen die Normalverteilung, Weibullverteilung und Gleichverteilung keinen signifikanten Einfluss auf den Median der Amplituden. Bei Betrachtung der künstlichen Verteilung zeigt sich eine Erhöhung des Medians. Dies führt für die erste Edgewise Biegung sowie die erste Torsion zu einem höheren Median im Vergleich zu dem unverstimmten System.

Analog zu dem stark vereinfachten Modell lässt sich die Reduktion des Medians der Amplitude auch an dem realitätsnahen Modell erkennen. Die maximale Reduktion beträgt für beide Modelle 35% und tritt bei künstlicher Verteilung des Elastizitätsmoduls auf. Die Dämpfungsverstimmung kann zu einer Erhöhung des Medians führen. Bei künstlicher Verteilung kann sich dadurch ein höherer Median des verstimmten Systems im Vergleich zum unverstimmten System ergeben.

### Maximale Amplitude

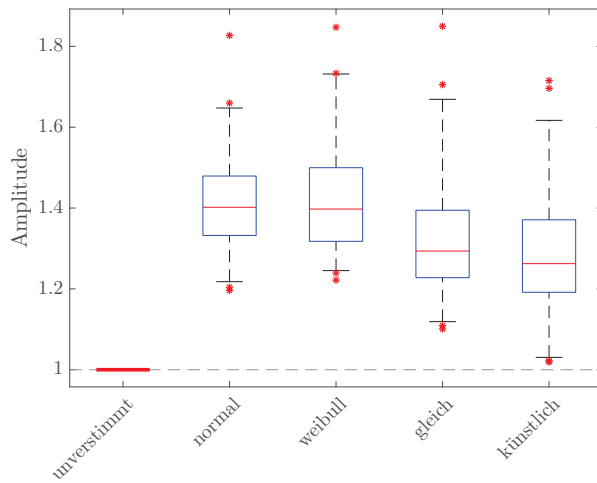
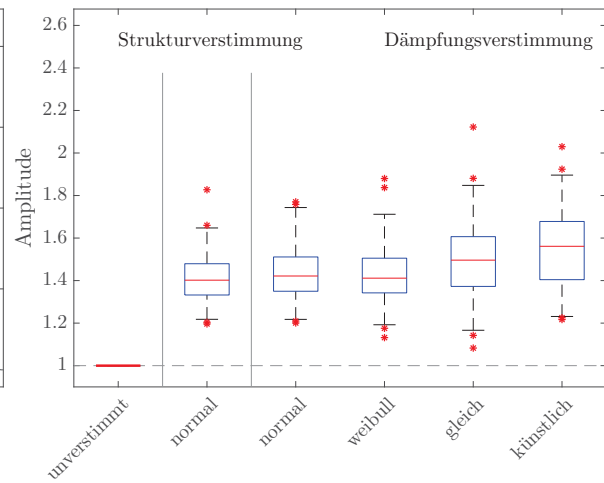
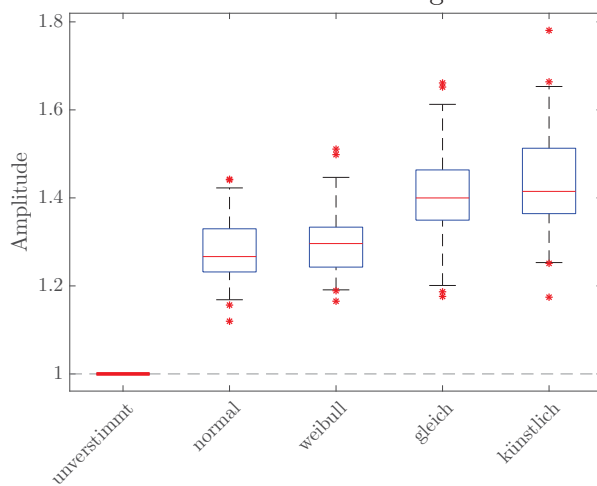
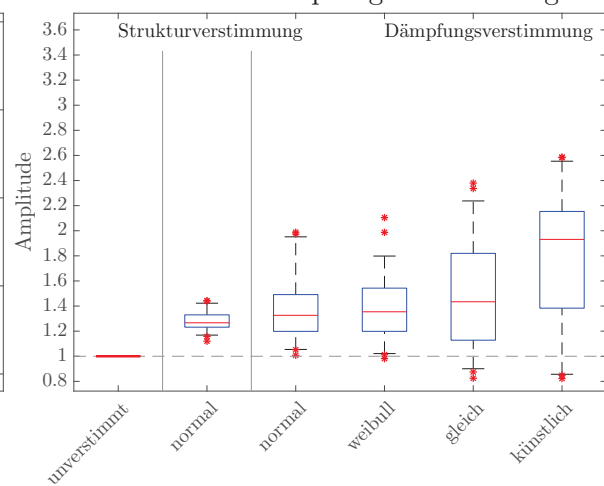
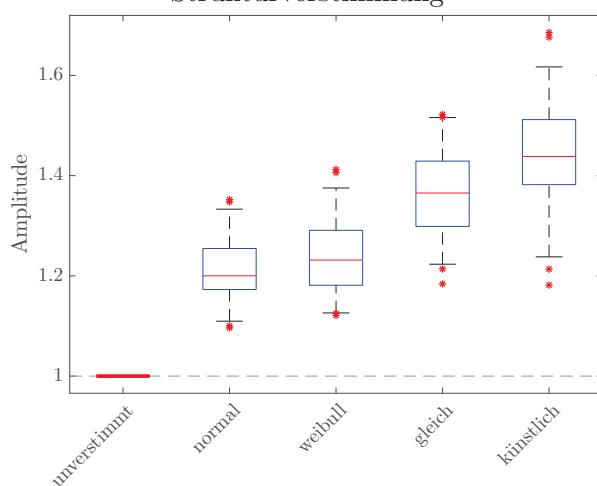
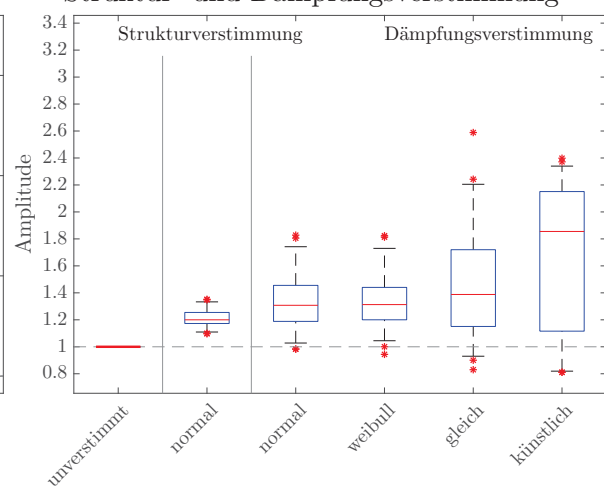


**Abbildung 5.20:** Exemplarische Darstellung der ausgewerteten maximalen Amplitude

Das Whitehead-Limit bei konstanter Dämpfung (vgl. Gleichung (2.29)) ergibt sich für das realitätsnahe Modell mit 75 Schaufeln zu

$$\alpha_{max} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{75}) \approx 4,83. \quad (5.2)$$

Zunächst wird die strukturverstimmte Turbinenlaufstufe ohne Dämpfungsverstimmung betrachtet. **Abbildung 5.21** zeigt die maximalen Amplituden des realitätsnahen Modells pro Turbinenlaufstufe. Hierbei liegt die maximale Amplitude analog zum stark vereinfach-

(a) Erste Biegung -  
Strukturverstimmung(b) Erste Biegung -  
Struktur- und Dämpfungsverstimmung(c) Erste Edgewise Biegung -  
Strukturverstimmung(d) Erste Edgewise Biegung -  
Struktur- und Dämpfungsverstimmung(e) Erste Torsion -  
Strukturverstimmung(f) Erste Torsion -  
Struktur- und Dämpfungsverstimmung

**Abbildung 5.21:** Box-Plots der maximalen Amplitude pro Turbinenlaufstufe für verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen



ten Modell für alle Modefamilien und Wahrscheinlichkeitsverteilungen deutlich unterhalb des Whitehead-Limits.

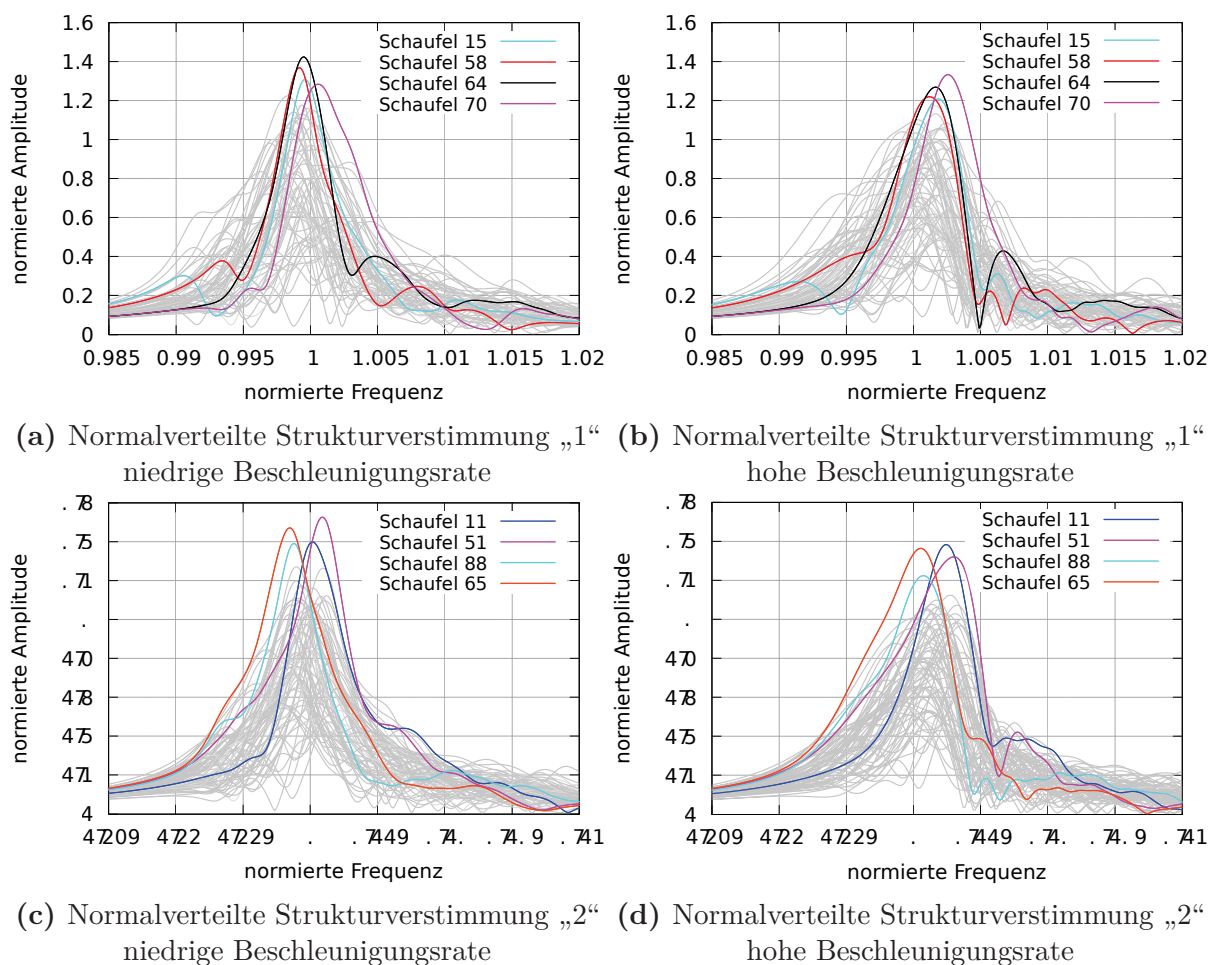
Das höchste Maximum liegt bei 1,85 für die erste Biegung und gleichverteiltem Elastizitätsmodul. Das höchste 97,5%-Quantil liegt bei 1,73 für die erste Biegung und weibullverteilttem Elastizitätsmodul. Auffällig sind die Ergebnisse der künstlichen Verteilung. Hierfür ergeben sich bei Betrachtung der ersten Biegung die niedrigsten Amplitudenüberhöhungen innerhalb der Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Bei Betrachtung der ersten Edgewise Biegung und erste Torsion zeigt sich für die künstliche Verteilung jedoch die höchste Amplitudenüberhöhung.

Alle maximalen Amplituden pro verstimmter Turbinenlaufstufe liegen oberhalb der Amplitude der unverstimmten Turbinenlaufstufe.

Die rechte Seite der **Abbildung 5.21** zeigt den Einfluss der Dämpfungsverstimmung. Ausgehend von exemplarisch normalverteilter Strukturverstimmung sind die maximalen Amplituden pro Turbinenlaufstufe für unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Dämpfungsverstimmung dargestellt. Die zusätzliche Dämpfungsverstimmung führt für alle Modefamilien und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu einer Erhöhung des 97,5%-Quantils. Hierbei führen die Gleichverteilung und künstliche Verteilung analog zum stark vereinfachten Modell zu einer stärkeren Erhöhung des 97,5%-Quantils als die Normalverteilung und Weibullverteilung. Bei Betrachtung der ersten Edgewise Biegung und ersten Torsion ergeben sich maximale Amplituden von bis zu 260% der Amplitude des unverstimmten Systems. Dies lässt sich auf den starken Einfluss der Dämpfungsverstimmung zurückführen. Bei Betrachtung von normalverteilter und weibullverteilter Dämpfung liegt die maximale Amplitude bei 2,10. Zudem können maximale Amplituden unterhalb der maximalen Amplitude des unverstimmten Systems auftreten.

## 6 Transiente Analysen verstimmter Turbinenlaufstufen

### 6.1 Transiente Schwingungsantwort verstimmter Turbinenlaufstufen



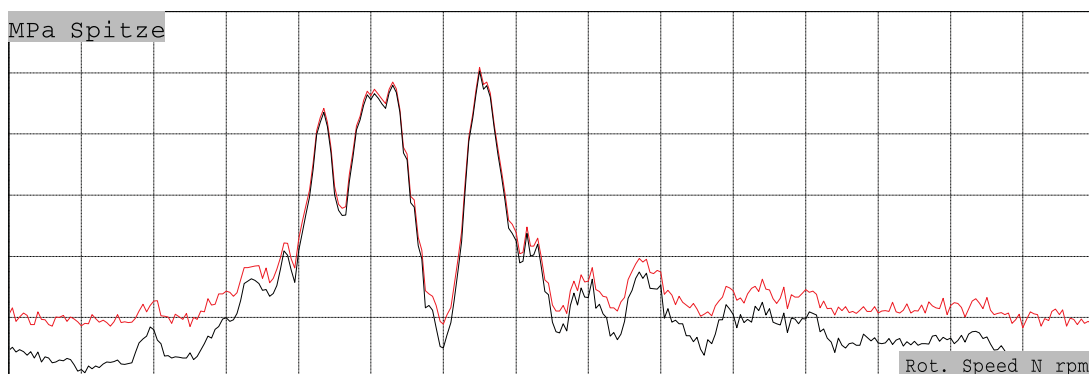
**Abbildung 6.1:** Transiente Schwingungsantwort exemplarischer Turbinenlaufstufen mit normalverteilter Strukturverstimmung und konstanter Dämpfung bei unterschiedlichen Beschleunigungsraten

In diesem Kapitel wird das Schwingungsverhalten verstimmter Turbinenlaufstufen bei einer Resonanzdurchfahrt betrachtet. **Abbildung 6.1** zeigt exemplarisch die Schwingungsantwort zwei verstimmter Turbinenlaufstufen für eine realistische niedrige und eine realistische hohe Beschleunigungsrate. Beide Turbinenlaufstufen sind normalverteilt strukturverstimmt und ohne Dämpfungsverstimmung.

Die Schwingungsantwort für die niedrige Beschleunigungsrate zeigt hierbei ein identisches Verhalten zur stationären Schwingungsantwort. Im Vergleich dazu lassen sich bei Betrachtung der Schwingungsantwort für die hohe Beschleunigungsrate deutlich die Verschiebung der Resonanzfrequenz sowie die Reduktion der maximalen Amplitude erkennen (vgl. **Abschnitt 2.5**).

Diese beiden transienten Effekte führen zudem für die verschiedenen Beschleunigungsraten zu einer unterschiedlichen Schaufel mit der maximalen Amplitude. In **Abbildung 6.1a** zeigt für die niedrige Beschleunigungsrate die Schaufel 64 die maximale Amplitude. Dementgegen ergibt sich in **Abbildung 6.1b** für die hohe Beschleunigungsrate die maximale Amplitude für die Schaufel 70. In **Abbildung 6.1c** und **Abbildung 6.1d** wechselt die Schaufel mit der maximalen Amplitude von Schaufel 42 zu Schaufel 22. Dieser Wechsel der Schaufel mit der maximalen Amplitude lässt sich auch bei zusätzlicher Dämpfungsverstimmung beobachten. Allerdings liegt die maximale Amplitude für die hohe Beschleunigungsrate in allen Fällen unterhalb der maximalen Amplitude für die niedrige Beschleunigungsrate.

## 6.2 Bestimmung der linearen Dämpfung aus der mittleren Amplitude



**Abbildung 6.2:** Transiente Schwingungsantwort einer realer Turbinenlaufstufe aus einer Messung bei der MTU Aero Engines AG [11]

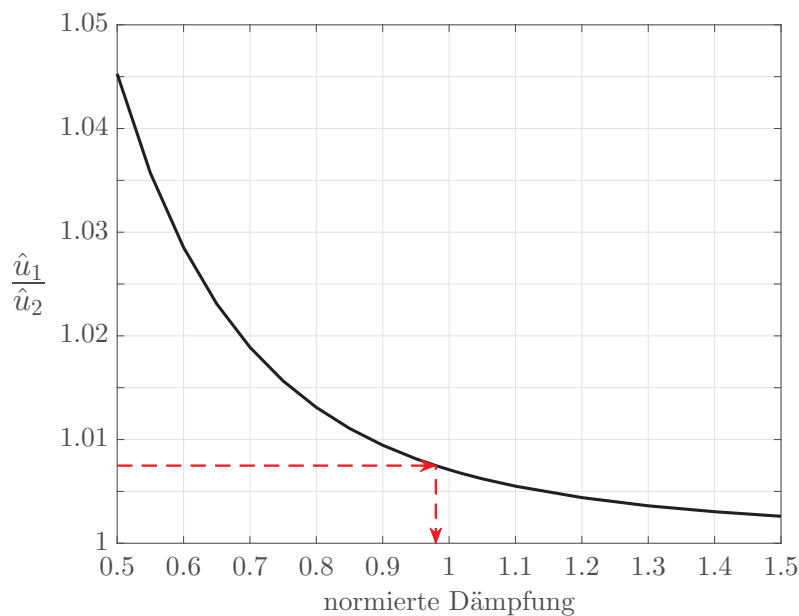
**Abbildung 6.2** zeigt die transiente Schwingungsantwort aus einer Messung einer realen Turbinenlaufstufe bei der MTU Aero Engines AG [11]. Hierbei spielt zusätzlich zu den in

dieser Arbeit analysierten Verstimnungsarten noch die Verstimmung aufgrund unterschiedlicher Kristallorientierung eine Rolle. Dargestellt ist exemplarisch die ermittelte Spannung an einem Dehnmessstreifen. Die Messung zeigt analog zu den stationären Analysen in **Kapitel 5** mehrere Resonanzspitzen für eine Schaufel bei derselben Schwingungsform. Dadurch ist eine Dämpfungsbestimmung mittels linearer Regression [18] oder anhand der Halbwertsbreite [24] nicht mehr möglich.

In [12] wird deshalb eine Methode zur Bestimmung der äquivalenten linearen Dämpfung aus der transienten Messung verstimmter Turbinenlaufstufen vorgestellt. Diese soll nachfolgend anhand transientser Simulationen des realitätsnahen Modells für Turbinenlaufstufen mit Strukturverstimmung verifiziert werden.

### 6.2.1 Erläuterung der Methode zur Dämpfungsbestimmung

Aufgrund der charakteristischen transienten Effekte (vgl. **Abschnitt 2.5**) ergibt sich mit zunehmender Beschleunigungsrate eine Reduktion der Amplitude. Diese Reduktion lässt sich durch das Verhältnis der Amplituden bei einer niedrigen Beschleunigungsrate (Index 1) und bei einer hohen Beschleunigungsrate (Index 2) ausdrücken. In [12] wird außerdem gezeigt, dass das Verhältnis der Beschleunigungsraten direkt proportional zur linearen Dämpfung ist.



**Abbildung 6.3:** Kennlinie zur Bestimmung der linearen Dämpfung

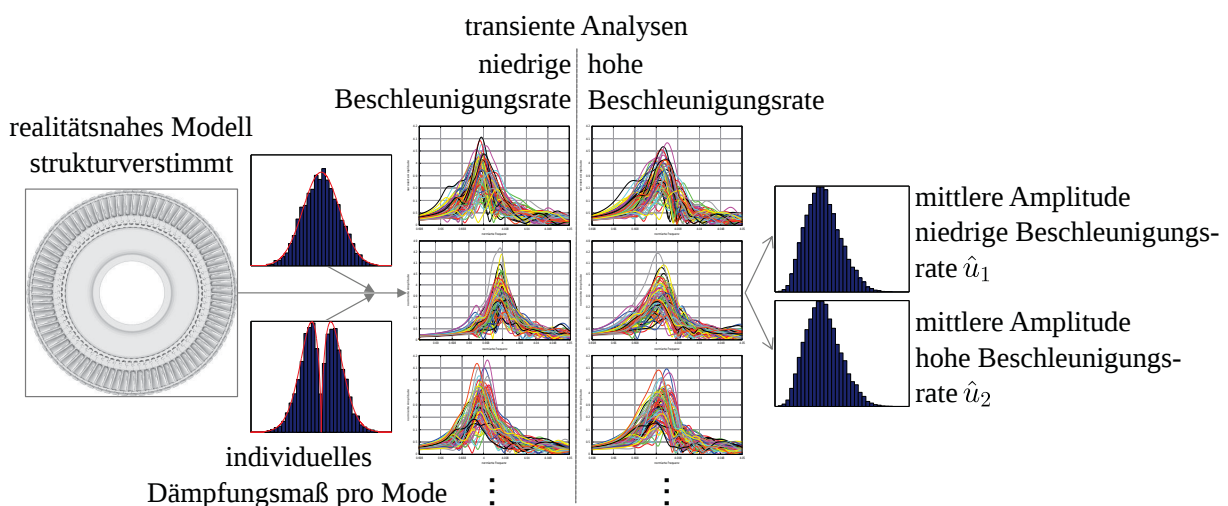
Somit lässt sich abhängig von dem Verhältnis der hohen zur niedrigen Beschleunigungsrate ein direkter Zusammenhang zwischen dem Verhältnis der Amplituden und der linearen Dämpfung herstellen. Dazu wird für die unverstimmte Turbinenlaufstufe die Amplitude

bei einer niedrigen Beschleunigungsrate und bei einer hohen Beschleunigungsrate für unterschiedliche Dämpfungen bestimmt. Die Dämpfung wird dabei analog zu den vorherigen Analysen linear durch Angabe des Lehr'schen Dämpfungsmaß modelliert. Daraus ergibt sich in Abhängigkeit der Beschleunigungsrate eine Kennlinie zwischen dem Verhältnis der Amplituden und der linearen Dämpfung (siehe **Abbildung 6.3**).

Zur Bestimmung der äquivalenten linearen Dämpfung verstimmter Turbinenlaufstufen wird die mittlere Amplitude verwendet. Diese wird im weiteren Verlauf mit  $\hat{u}$  dargestellt. In [12] wird gezeigt, dass die mittlere Amplitude bei durchgeführten realen Messungen annähernd konstant ist. Dieses Verhalten zeigen auch die stationären Analysen im vorherigen Kapitel. In **Abbildung 5.2** lässt sich eine gute Reproduzierbarkeit des Medians beobachten.

Die Analysen werden für die verstimmte Turbinenlaufstufe bei einer niedrigen Beschleunigungsrate und einer hohen Beschleunigungsrate durchgeführt. Die Beschleunigungsrate werden für alle Berechnungen als identisch vorausgesetzt. Anschließend wird für beide Beschleunigungsrate der Mittelwert der maximalen Amplituden pro Schaufel bestimmt. Somit ist es möglich, ein gemitteltes Verhältnis der Amplituden bei niedriger und hoher Beschleunigungsrate  $\hat{u}_1/\hat{u}_2$  zu erhalten. Anhand der Kennlinie in **Abbildung 6.3** lässt sich aus dem Verhältnis der mittleren Amplituden auf die äquivalente lineare Dämpfung schließen.

### 6.2.2 Verifikation der Methode an dem realitätsnahen Modell



**Abbildung 6.4:** Schematische Darstellung der Vorgehensweise

In diesem Abschnitt soll die Methode für strukturverstimmte Turbinenlaufstufen numerisch verifiziert werden. Dazu wird die modale Dämpfung für die transienten Berechnungen vorgegeben. Aus den Ergebnissen der Simulationen wird die äquivalente Dämpfung anhand der Methode ermittelt. Anschließend folgt ein Vergleich der ermittelten Dämpfungswerten

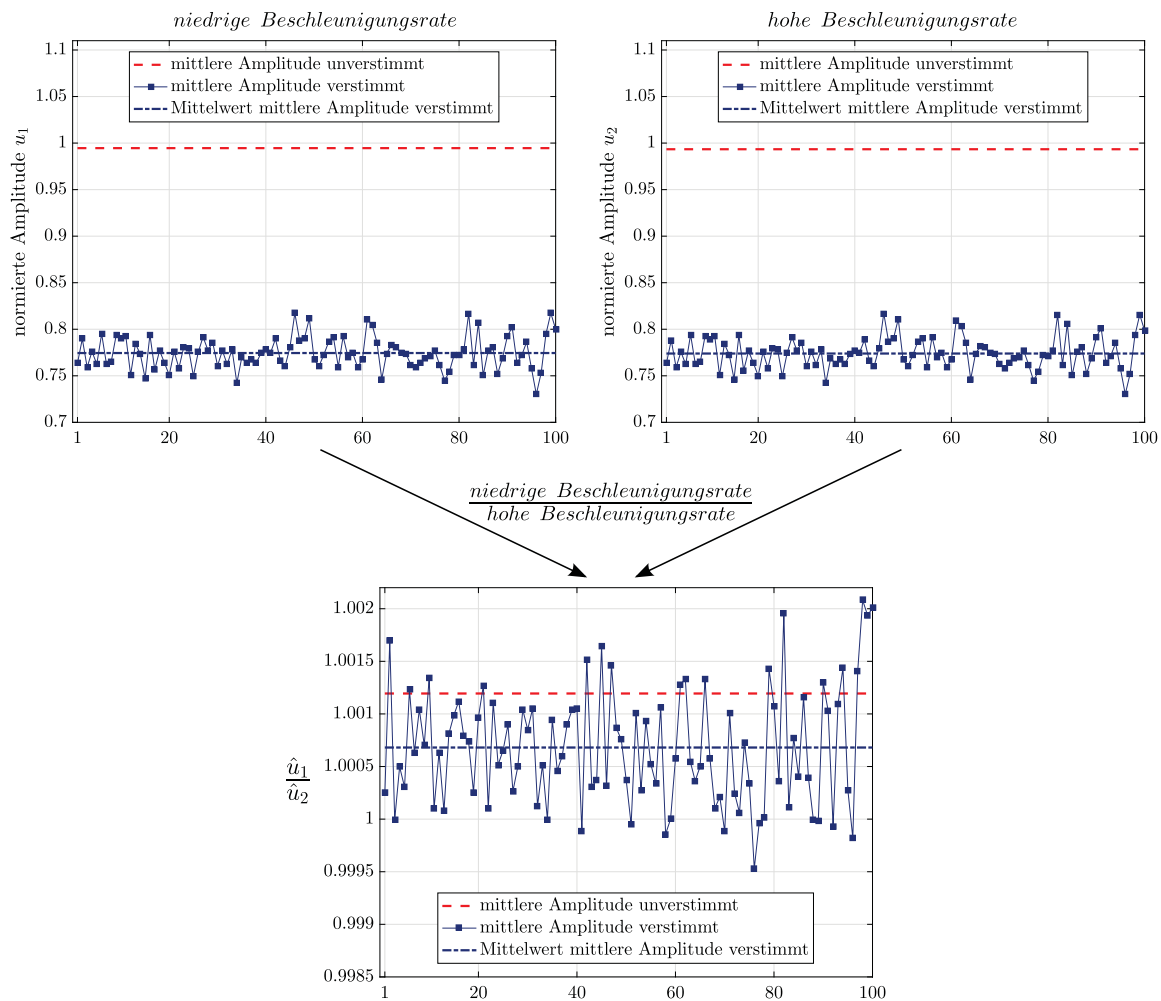
mit der angesetzten Dämpfung.

In **Abbildung 6.4** ist die Vorgehensweise schematisch dargestellt. Grundlage ist die strukturverstimmte realitätsnahe Turbinenlaufstufe. Für diese werden 100 Simulationen gerechnet. Eine Simulation besteht jeweils aus der Analyse mit der niedrigen und der hohen Beschleunigungsrate. Nach jeder Simulation wird das Lehr'sche Dämpfungsmaß pro Mode variiert. Die Erzeugung der zufälligen Dämpfungen erfolgt entsprechend der Wahrscheinlichkeitsverteilungen mittels Simple Random Samplings. Dadurch werden die unterschiedlichen Kontaktschließungen pro Messung modelliert. Abschließend wird für beide Beschleunigungsraten der Mittelwert der Amplitude pro Schaufel bestimmt. Somit entspricht die Vorgehensweise der mehrmaligen Messung einer identischen Turbinenlaufstufe bei unterschiedlichen Kontaktschließungen am Schaufelfuß sowie am Deckband.

Die stationären Analysen mit gleichverteilter Dämpfungsverstimmung und künstlicher Dämpfungsverstimmung in **Abschnitt 5.3.2** haben zu deutlich überhöhten Amplitudenüberhöhungsfaktoren geführt. Diese werden bei Messungen realer Turbinenlaufstufen nicht beobachtet. Deshalb werden in diesem Abschnitt für die Dämpfungsverstimmung lediglich die Normalverteilung und Weibullverteilung verwendet.

Ausgewertet werden dieselben Modelfamilien des realitätsnahen Modells wie bei den stationären Analysen. In **Abschnitt 5.3.2** zeigen sich ähnliche Ergebnisse für die Amplituden der ersten Edgewise Biegung und der ersten Torsion. Deshalb wird die erste Torsion nicht analysiert und dafür eine größere Anzahl an Simulationen für die erste Edgewise Biegung durchgeführt.

**Abbildung 6.5** zeigt die mittlere Amplitude für die erste Biegung bei normalverteilter Strukturverstimmung und normalverteilter Dämpfungsverstimmung. Die Amplituden sind hierbei auf die stationäre unverstimmte Amplitude normiert. Auf der linken Seite ist die mittlere Amplitude pro Simulation bei der niedrigen Beschleunigungsrate dargestellt und auf der rechten Seite die mittlere Amplitude bei der hohen Beschleunigungsrate. Analog zu den stationären Analysen liegt die mittlere Amplitude der verstimmten Turbinenlaufstufe deutlich unterhalb der mittleren Amplitude der unverstimmten Turbinenlaufstufe. Darüber hinaus lässt sich die gute Reproduzierbarkeit der mittleren Amplitude erkennen. Es ergibt sich zwischen den einzelnen Simulationen eine Spannweite von  $\pm 5\%$  um den Mittelwert. Die mittleren Amplituden pro Simulation werden anschließend ins Verhältnis zueinander gesetzt. Dieses Verhältnis ist für die unverstimmte und verstimmte Turbinenlaufstufe in der unteren Abbildung dargestellt. Hierbei treten für die erste Biegung nur geringe Unterschiede zwischen den Amplituden bei den verschiedenen Beschleunigungsraten auf. Des Weiteren ergibt sich teilweise ein Verhältnis unter 1. Dies führt dazu, dass eine Auswertung der ersten Biegung für die berechneten Beschleunigungsraten nicht sinnvoll ist. In der Realität müssen die Messungen mit einer deutlich höheren Beschleunigungsrate



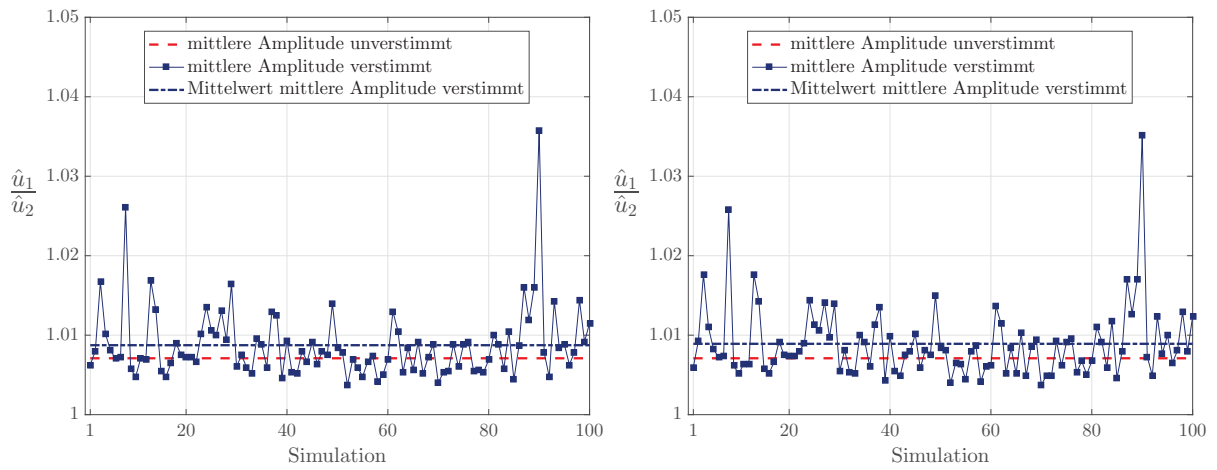
**Abbildung 6.5:** Verhältnis der mittleren Amplituden für die erste Biegung

wiederholt werden, so dass sich ein ausreichend großes Verhältnis ergibt.

Bei Betrachtung der ersten Edgewise Biegung zeigt sich ein größerer Unterschied zwischen den Beschleunigungsraten. Dies lässt sich auf die geringere modale Dämpfung  $\zeta_{1E} < \zeta_{1F}$  zurückführen (vgl. **Abschnitt 2.5**). Außerdem treten nur Verhältnisse über 1 auf, so dass die erste Edgewise Biegung für die berechneten Beschleunigungsraten sinnvoll ausgewertet werden kann.

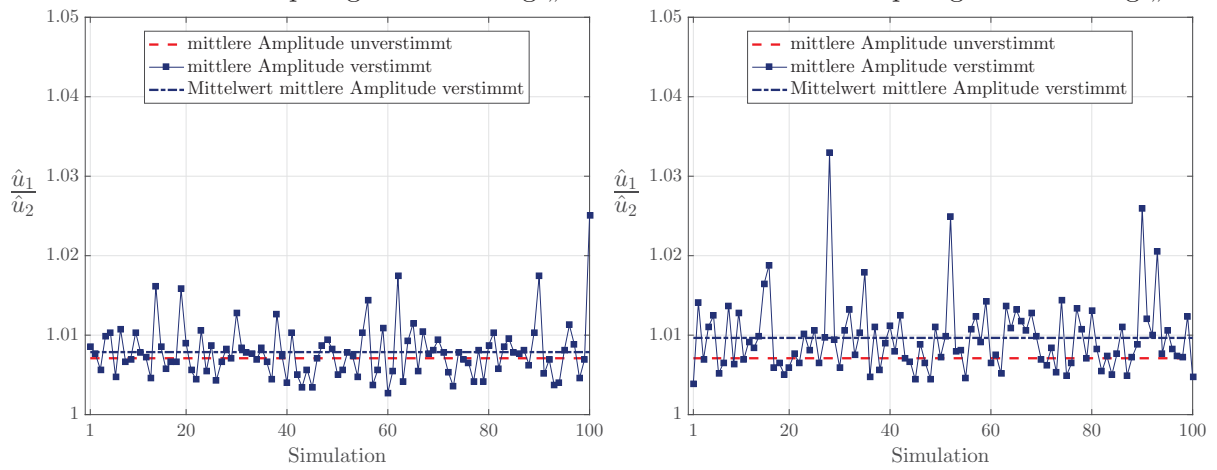
In **Abbildung 6.6** sind die Ergebnisse für vier exemplarische Turbinenlaufstufen dargestellt. Dafür wird analog zur ersten Biegung die mittlere Amplitude pro Simulation für die niedrige Beschleunigungsrate und für die hohe Beschleunigungsrate ausgewertet. Diese werden anschließend ins Verhältnis zueinander gesetzt und daraus der Mittelwert bestimmt. In **Abbildung 6.6a** und **Abbildung 6.6b** wird die identische Dämpfungsverstimmung für alle Simulationen für unterschiedlich strukturverstimmte Turbinenlaufstufen gerechnet. Hierbei zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Verhältnisse. In **Abbildung 6.6a** und **Abbildung 6.6c** wird die identisch strukturverstimmte Turbinenlaufstufe für





(a) Normalverteilte Strukturverstimmung „1“  
normalverteilte Dämpfungsverstimmung „1“

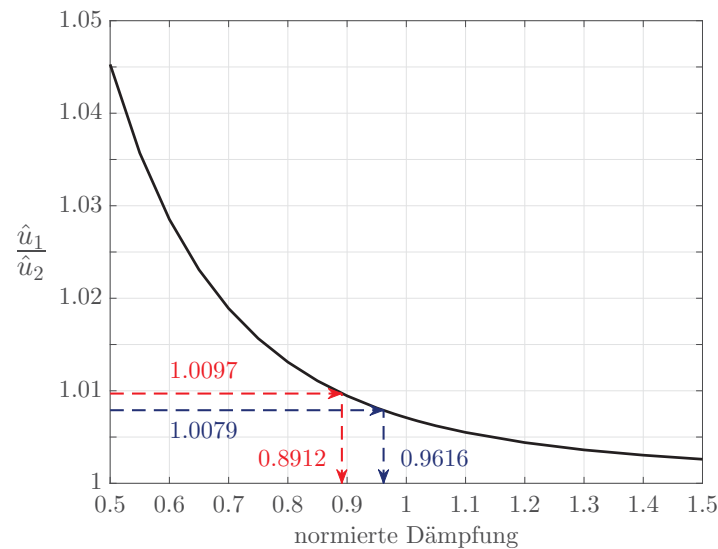
(b) Normalverteilte Strukturverstimmung „2“  
normalverteilte Dämpfungsverstimmung „1“



(c) Normalverteilte Strukturverstimmung „1“  
weibullverteilte Dämpfungsverstimmung „2“

(d) Weibullverteilte Strukturverstimmung „3“  
normalverteilte Dämpfungsverstimmung „3“

**Abbildung 6.6:** Verhältnis der mittleren Amplituden für die erste Edgewise Biegung



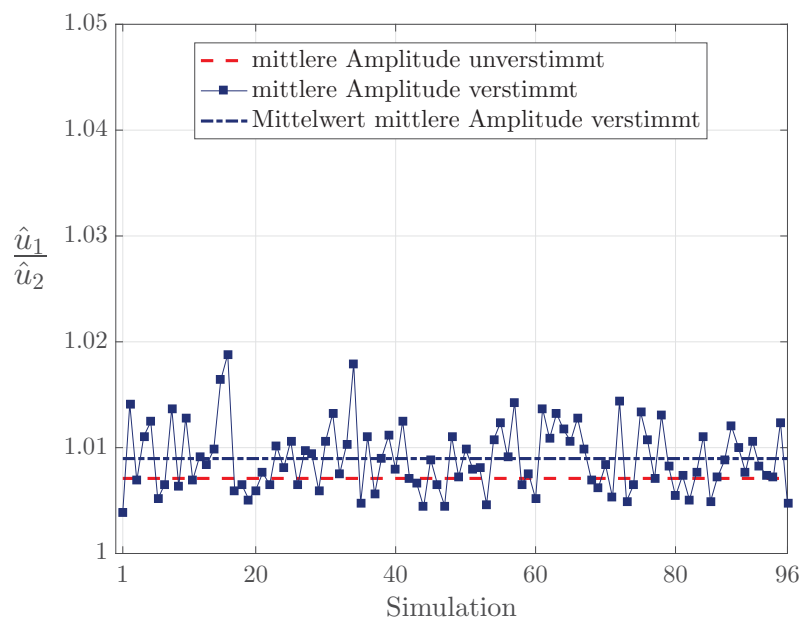
**Abbildung 6.7:** Ermittlung der Dämpfung aus dem Verhältnis der Beschleunigungsraten



unterschiedliche Dämpfungsverstimmungen pro Simulation gerechnet. Hierbei lässt sich kein Zusammenhang der Ergebnisse erkennen.

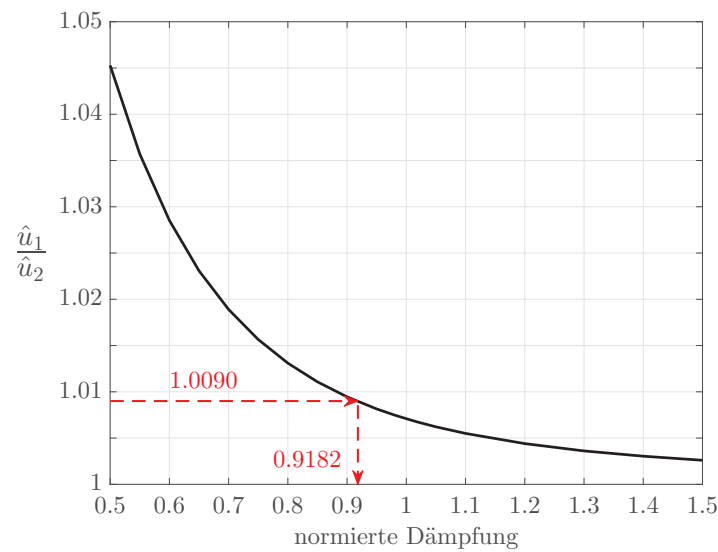
Zur Validierung der Methode werden exemplarisch die Ergebnisse ausgewertet, bei denen das Verhältnis die größte und die niedrigste Abweichung zum unverstimmten System zeigt. Das sind in diesem Fall **Abbildung 6.6d** und **Abbildung 6.6c**. In **Abbildung 6.6d** ergibt sich mit 1,0097 die größte Abweichung des Verhältnis zum unverstimmten System. Anhand der Kennlinie lässt sich dafür eine normierte Dämpfung von 0,8912 bestimmen. In diesem Fall wird die Dämpfung somit  $\approx 10\%$  niedriger als der Mittelwert der angesetzten Dämpfung ermittelt. Die geringste Abweichung des Verhältnis zum unverstimmten System zeigt **Abbildung 6.6c** mit 1,0079. Hierfür wird anhand der Kennlinie eine normierte Dämpfung von 0,9616 ermittelt. Die Abweichung zu dem Mittelwert der angesetzten Dämpfung beträgt in diesem Fall somit  $\approx -4\%$ .

In **Abbildung 6.6d** lassen sich Werte erkennen, die besonders stark vom Mittelwert streuen. Aufgrund der großen Abweichung ergibt sich somit ein besonders starker Einfluss auf den Mittelwert. Da die übrigen Werte nur gering um den Mittelwert streuen, lassen sich diese als Ausreißer deklarieren. Ein Grund dafür kann sein, dass bei diesen Simulationen der Mittelwert der angesetzten Dämpfung stark von der nominalen Dämpfung abweicht. In der Realität können solche Ausreißer zudem auf Messfehlern basieren.



**Abbildung 6.8:** Verhältnis der Beschleunigungsrate ohne Ausreißer weibullverteilte Strukturverstimmung „3“ - normalverteilte Dämpfungsverstimmung „3“

Berücksichtigt man diese Werte in der Auswertung nicht, ergibt sich das Verhältnis der Beschleunigungsrate wie in **Abbildung 6.8**. Hiermit wird eine äquivalente Dämpfung von 0,9182 ermittelt (siehe **Abbildung 6.9**). Somit beträgt die Abweichung der ermittelten



**Abbildung 6.9:** Ermittlung der Dämpfung aus dem Verhältnis der Beschleunigungsraten ohne Ausreißer

Dämpfung im Vergleich zur angesetzten Dämpfung  $\approx -8\%$ .

Für die durchgeführten Analysen der ersten Edgewise Biegung lässt sich die äquivalente Dämpfung anhand der Methode mit einer guten Genauigkeit bestimmen. Die Abweichung zur angesetzten Dämpfung liegt im Bereich von  $-10\%$  bis  $-4\%$ . Werden Ausreißer bei der Auswertung nicht berücksichtigt, ergibt sich die maximale Differenz im Vergleich zur angesetzten Dämpfung zu  $-8\%$ . Somit ist die Methode unter Berücksichtigung der in dieser Arbeit getroffenen Annahmen für strukturverstimte Turbinenlaufstufen erfolgreich verifiziert.

## 7 Zusammenfassung

In **Kapitel 5** werden für ein stark vereinfachtes Modell und ein realitätsnahes Modell stationäre Analysen durchgeführt. Für die Simulationen werden jeweils die FE-Vollmodelle verwendet. Dabei wird das Elastizitätsmodul pro Schaufel und die modale Dämpfung pro Mode anhand verschiedener Wahrscheinlichkeitsverteilungen variiert. Bei der Auswertung der Simulationen wird zwischen Strukturverstimmung und konstanter modaler Dämpfung sowie Strukturverstimmung und gleichzeitiger Dämpfungsverstimmung unterschieden.

Die Betrachtung der Resonanzfrequenzen zeigt für die betrachteten Modelle eine Unabhängigkeit von der Dämpfungsverstimmung. Somit ist es für die Analyse der Resonanzfrequenz ausreichend, die Strukturverstimmung bei konstanter Dämpfung zu simulieren. Für beide Modelle wird eine Abweichung der Resonanzfrequenzen der Turbinenlaufstufe und der Elastizitätsmodule der Einzelschaufeln festgestellt. Bei Betrachtung des stark vereinfachten Modells ergibt sich für die erste Torsion eine deutlich größere Spannweite der Resonanzfrequenzen im Vergleich zu dem Elastizitätsmodul. Für das realitätsnahe Modell treten ebenfalls Resonanzfrequenzen außerhalb der Spannweite des Elastizitätsmoduls auf.

Bei Betrachtung der Strukturverstimmung und konstanter Dämpfung wird für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei beiden Modellen eine Reduktion der mittleren Amplitude festgestellt. Allerdings ist diese Reduktion für die Mischformen des realitätsnahen Modells deutlich schwächer ausgeprägt. Die Amplituden für die Strukturverstimmung und gleichzeitige Dämpfungsverstimmung zeigen eine Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Anhand der eingeführten künstlichen Dämpfungsverteilung kann eine Erhöhung der mittleren Amplitude im Vergleich zu der unverstimmten Turbinenlaufstufe erreicht werden.

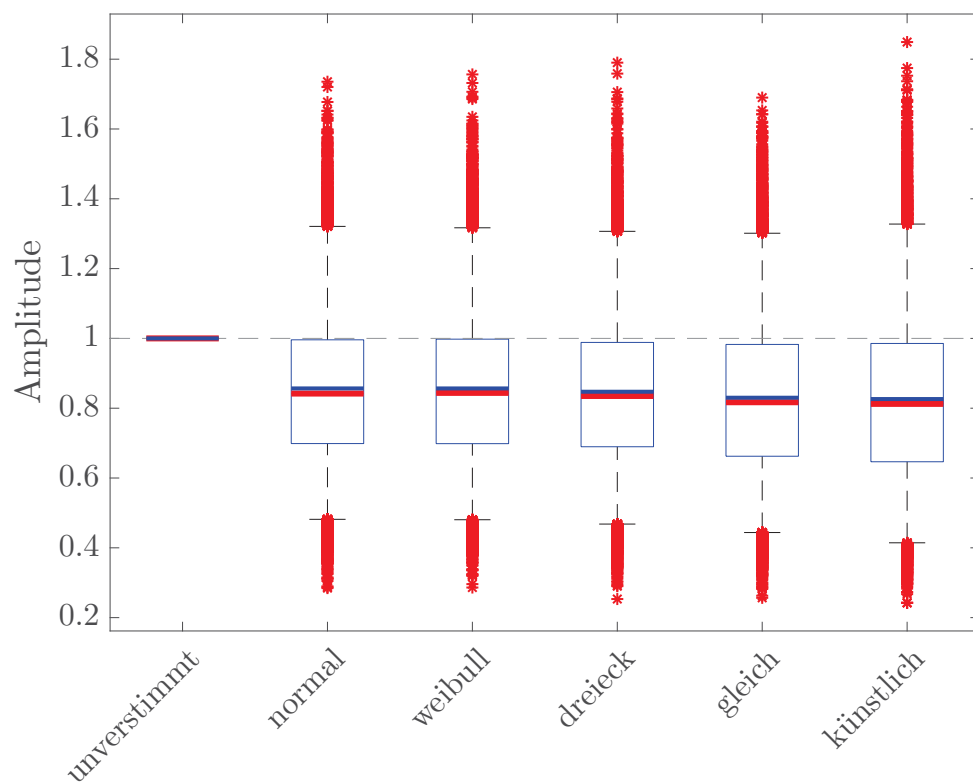
Des Weiteren führt die Strukturverstimmung und konstante Dämpfung für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei beiden Modellen zu einer Erhöhung der maximalen Amplitude. Dabei ergeben sich unterschiedliche maximale Amplituden für die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Aufgrund dessen ist die Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Eingangsparameter wichtig, um eine Abschätzung der maximalen Amplitude treffen zu können. Das höchste Maximum wird für das stark vereinfachte Modell für die erste Torsion und künstliche Verteilung des Elastizitätsmoduls bei 2,3 erreicht. Für das realitätsnahe Modell ergibt sich das höchste Maximum für die erste Biegung bei

gleichverteiltem Elastizitätsmodul zu 1,85. Die zusätzliche Dämpfungsverstimmung kann zu einer weiteren Erhöhung führen. Unter Berücksichtigung der Dämpfungsverstimmung ergibt sich das höchste Maximum für die stark vereinfachte Turbinenlaufstufe zu 3,3 und für die realitätsnahe Turbinenlaufstufe zu 2,6. Dementgegen kann anhand der Dämpfungsverstimmung auch eine Reduktion der maximalen Amplitude unterhalb der Amplitude der unverstimmten Turbinenlaufstufe erreicht werden. Allgemein weichen bei den Analysen der Amplitude die Ergebnisse mit der künstlichen Verteilung von den weiteren Verteilungen ab. Darüber hinaus ist in den Simulationen der Einfluss der Dämpfungsverstimmung deutlich größer als bei realen Messungen. Aufgrund dessen ist der verwendete Ansatz der linearen Modellierung der Dämpfung nur bedingt anwendbar.

In **Kapitel 6** werden transiente Analysen für verstimmte Turbinenlaufstufen durchgeführt. Hierbei wird festgestellt, dass für unterschiedliche Beschleunigungsraten verschiedene Schaufeln der Turbinenlaufstufe die maximale Amplitude aufweisen können. Die höhere maximale Amplitude tritt jedoch in allen Fällen für die niedrige Beschleunigungsrate auf. Des Weiteren wird eine Methode zur Ermittlung der äquivalenten linearen Dämpfung anhand transienter Analysen für verstimmte Turbinenlaufstufen verifiziert. Die Grundidee der Methode ist die Bestimmung der linearen Dämpfung aus dem Verhältnis der Mittelwerte der Amplituden bei einer niedrigen und einer hohen Beschleunigungsrate. Zur Verifikation wird die modale Dämpfung für die Simulationen vorgegeben und anschließend mit der ermittelten Dämpfung verglichen. Die Analysen werden für mehrere unterschiedlich strukturverstimmte Turbinenlaufstufen durchgeführt, und die Dämpfungsverstimmung bei jeder Simulation variiert. Die anhand des Mittelwerts der Amplituden bestimmte Dämpfung zeigt für eine große Anzahl durchgeführter Simulationen eine Abweichung im Bereich von  $\approx -4\%$  bis  $\approx -10\%$  im Vergleich zur angesetzten Dämpfung. Dies stellt eine gute Übereinstimmung der Werte dar. Darüber hinaus wird die Dämpfung jeweils geringfügig zu niedrig ermittelt. Somit ist die Methode konservativ. Allerdings zeigt sich eine große Streuung des Verhältnis der Mittelwerte. Bei einer geringen Anzahl an durchgeführten Simulationen bzw. Messungen kann dies einen starken Einfluss auf die Mittelwerte der Amplituden und somit auf die ermittelte Dämpfung zeigen. Daraus folgt, dass diese Anzahl an Simulationen bzw. Messungen einen wichtigen Parameter zur korrekten Ermittlung der äquivalenten Dämpfung anhand der vorgestellten Methode darstellt.

## A Anhang

### Vergleich des Medians und des Mittelwerts



**Abbildung A.1:** Exemplarischer Vergleich des Medians und des Mittelwerts

**Abbildung A.1** zeigt exemplarisch den Vergleich des Medians und des Mittelwerts. Dabei ist der Median als durchgezogene rote Linie dargestellt und der Mittelwert als durchgezogene blaue Linie.

# Literaturverzeichnis

- [1] BEIROW, B.: *Grundlegende Untersuchungen zum Schwingungsverhalten von Verdichterlaufrädern in Integralbauweise*. Habilitationsschrift, Brandenburgische Technische Universität Cottbus, 2009.
- [2] BEIROW, B., FIGASCHEWSKY, F., KÜHHORN, A. und BORNHORN, A.: *Modal Analyses of an Axial Turbine Blisk With Intentional Mistuning*. Proceedings of ASME Turbo Expo 2017, Charlotte, GT2017-63193, 2017.
- [3] BLADH, J. R.: *Efficient Predictions of the Vibratory Response of Mistuned Bladed Disks by Reduced Order Modeling*. Dissertation, University of Michigan, 2001.
- [4] CAMPBELL, W.: *Protection of steam turbine disk wheels from axial vibration*. General Electric Company, Schenectady, 1924.
- [5] CASTANIER, M. P. und PIERRE, C.: *Modeling and Analysis of Mistuned Bladed Disk Vibration: Status and Emerging Directions*. Journal of Propulsion and Power, Vol. 22(2), 2006.
- [6] CRAIG, R. R., JR. und BAMPTON, M. C. C.: *Coupling of Substructures for Dynamic Analyses*. AIAA Journal, Vol. 6(7):1313–1319, 1968.
- [7] DHONDT, G.: *The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications*. John Wiley & Sons, Chichester, 2004.
- [8] DHONDT, G.: *CalculiX CrunchiX User's Manual*, Version 2.12, 2017.
- [9] GUYAN, R.-J.: *Reduction of Stiffness and Mass Matrices*. AIAA Journal, Vol. 3(2):380–380, 1965.
- [10] HARTUNG, A.: *A Numerical Approach for the Resonance Passage Computation*. Proceedings of ASME Turbo Expo 2010, Glasgow, GT2010-22051, 2010.
- [11] HARTUNG, A.: *Blade Vibrations: Steady State Forced Response and Transient Measurements*. 19th Blade Mechanics Seminar, Winterthur, 2014.

- 
- [12] HARTUNG, A. und HACKENBERG, H.-P.: *A Practical Approach for Evaluation of Equivalent Linear Damping From Measurements of Mistuned and/or Non-Linear Stages and Forced Response Validation*. Proceedings of ASME Turbo Expo 2016, Seoul, GT2016-56435, 2016.
- [13] HARTUNG, A., HACKENBERG, H.-P. und RETZE, U.: *More Flexible Damping Systems for Blades and Vanes*. 12. Internationale Tagung Schwingungen in Rotierenden Maschinen, Graz, Seiten 333–342, 2017.
- [14] HOHL, A.: *Systematische Verstimmung und mehrfach gekoppelte Schaufelkränze von Turbomaschinen*. Abschlussbericht über das Vorhaben Nr. 898, Frankfurt am Main, Heft R550, 2010.
- [15] HÖNISCH, P., KÜHHORN, A. und BEIROW, B.: *Experimental and Numerical Analyses of Radial Turbine Blisks with Regard to Mistuning*. Proceedings of ASME Turbo Expo 2011, Vancouver, GT2011-45359, 2011.
- [16] IMREGUN, M.: *Structural and Aeroelastic Vibration Analysis of Bladed Systems*. Dissertation, Imperial College London, 1983.
- [17] IRRETIER, H.: *Zum Einfluss des Schwingungsverhaltens eines scheibenförmigen Tragkörpers auf die Eigenfrequenzen der Schaufeln thermischer Turbomaschinen*. Ingenieur-Archiv Nr. 50, Springer Verlag, Seiten 85–102, 1981.
- [18] JEFFERS, T. R., KIELB, J. J. und ABHARI, R. S.: *A Novel Technique for the Measurement of Blade Damping Using Piezoelectric Actuators*. Proceedings of ASME Turbo Expo 2000, München, 2000-GT-0359, 2000.
- [19] KLAUKE, T.: *Schaufelschwingungen realer integraler Verdichterräder im Hinblick auf Verstimmung und Lokalisierung*. Dissertation, Brandenburgische Technische Universität Cottbus, 2007.
- [20] KLAUKE, T., STREHLAU, U. und KÜHHORN, A.: *Integer Frequency Veering of Mistuned Blade Integrated Disks*. Journal of Turbomachinery, Vol. 135:061004–1 – 061004–7, 2013.
- [21] KOSCSÓ, A.: *Extension of Capabilities of the Finite Element Software CalculiX for Analysis of Anisotropic Bladed Disks*. Masterarbeit, Technische Universität München, 2016.
- [22] KRACK, M., SALLES, L. und THOUVEREZ, F.: *Vibration prediction of bladed disks coupled by friction joints*. Archives of Computational Methods in Engineering, Springer Verlag, 3(24):589–636, 2016.

- 
- [23] PANNING, L.: *Auslegung von Reibelementen zur Schwingungsdämpfung von Turbinenschaufeln*. Dissertation, Universität Hannover, 2005.
- [24] RAO, S. S.: *Mechanical Vibrations*. Pearson Education, New York, 6. Auflage, 2016.
- [25] RUFFINI, V., GREEN, S. und SCHWINGSHACKL, C. W.: *The Influence of Mistuning and Coriolis Effects on the Modal Parameters of Bladed Discs: An Experimental Study*. Proceedings of ASME Turbo Expo 2017, Charlotte, GT2017-63437, 2017.
- [26] SCHÖNENBORN, H., JUNGE, M. und RETZE, U.: *Contribution to Free and Forced Vibration Analysis of an Intentionally Mistuned Blisk*. Proceedings of ASME Turbo Expo 2012, Kopenhagen, GT2012-68683, 2012.
- [27] SCHREYER, F., GROSS, J., REUSS, P., JUNGE, M. und SCHOENENBORN, H.: *Consideration of Interface Damping in Shrouded Mistuned Turbine Blades*. Dynamics of Coupled Structures, Volume 1: Proceedings of the 32nd IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics, Springer Verlag, Seiten 105–112, 2014.
- [28] SRINIVASAN, A.V.: *Flutter and Resonant Vibration Characteristics of Engine Blades*. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 119:742–775, 1997.
- [29] STREHLAU, U.: *Schaufelschwingungen realer integraler Verdichterlaufräder bei zusätzlicher Berücksichtigung höherer Moden*. Dissertation, Brandenburgische Technische Universität Cottbus, 2011.
- [30] VOIGT, M.: *Probabilistische Simulation des strukturellen Verhaltens von Turbinenschaufeln*. Dissertation, Technische Universität Dresden, 2009.
- [31] VOIGT, M., LANG, G., BISCHOFF, T. und VAN LIL, T.: *ProSi Manual*, Version 2.3, 2011.
- [32] WHITEHEAD, D.S.: *Effect of Mistuning on the Vibration of Turbomachine Blades Induced by Wakes*. Journal of Mechanical Engineering Science, 8:15–21, 1966.
- [33] WILSON, A. und UTENG, T.: *Turbine Blade Dynamics and Blade-Vane Interaction in a Radial Inflow Turbine*. AGARD Conference Proceedings 537 Technology Requirements for Small Gas Turbines, Montréal, Seiten 35–1–35–11, 1994.
- [34] WITTIG, K.: *CalculiX GraphiX User's Manual*, Version 2.12, 2017.